दिनदर्शिके

मधली जादू

दिनदर्शिकेच्या आकड्यांची जादू पाहा
आणि हसत-खेळत गणित शिका.

अनुवाद
डॉ. श्री. मधुकर देशपांडे

श्री. पी. के. श्रीनिवासन

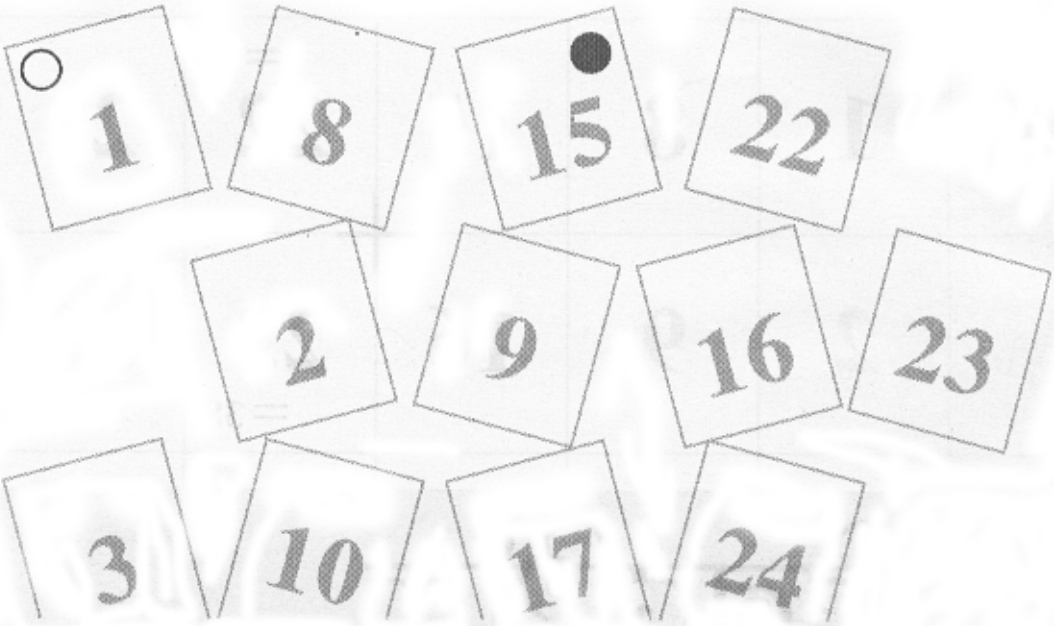
दिनदर्शिके मधली जादू

दिनदर्शिकेच्या आकड्यांची जादू पाहा आणि हसत-खेळत गणित शिका.

श्री. पी. के. श्रीनिवासन

अनुवाद : डॉ. श्री. मधुकर देशपांडे

मनोविकास प्रकाशन



Dinadarshikemadhali Jadoo । P. K. Srinivasan । Anuvad : Dr. Madhukar Deshpande
'दिनदर्शिके'मधली जादू । पी. के. श्रीनिवासन । अनुवाद : डॉ. मधुकर देशपांडे

प्रकाशक । अरविंद घन:श्याम पाटकर,
मनोविकास प्रकाशन, फ्लॅट नं. ३/ए, चौथा मजला,
शक्ती टॉवर्स, ६७२, नारायण पेठ, न्यू. म. वि. समोरील गल्ली, पुणे - ४११०३०.
दूरध्वनी : ०२०-६५२६२९५०

Website : www.manovikasprakashan.com
Email : manovikaspublication@gmail.com

© हक्क सुरक्षित

मुखपृष्ठ । अमोल पवार,

अक्षरजुळणी । विलास भोराडे, पुणे.

मुद्रक । बालाजी एन्टरप्रायजेस, धायरी, पुणे.

प्रथमावृत्ती । १२ डिसेंबर २०११

ISBN : 978-93-80264-95-0

मूल्य । ६० रुपये

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11 = 51	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25 = 51	26	27	28
29	30	31				

अनुक्रम

1. चला, आपण एक खेळ खेळूया 5

2. झटपट बेरीज आणि सरासरी 7

3. जादुई आयत आणि चौरस..... 12

4. अपूर्ण जादुई सारिण्या 14

5. क्रॉसचं कोडं..... 18

6. ताऱ्याचं कोडं..... 21

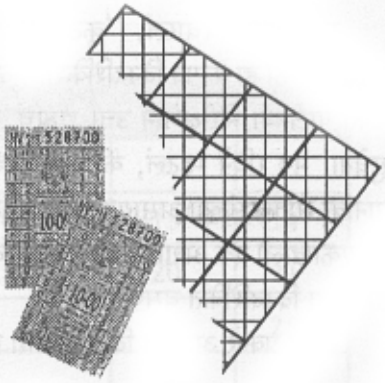
7. संपूर्ण जादुई चौरस..... 23

8. स्तंभीय बेरजेचा खेळ..... 37

9. दिनांक आणि वार 42

10. एका कपट्यावर दोनशे वर्षांची दिनदर्शिका..... 49

1. चला, आपण एक खेळ खेळूया



माझं नाव प्रसाद. मी नववीत आहे. माझा धाकटा भाऊ रवि सातवीत आहे आणि बहीण सुशिला पाचवीत. आमच्या वडिलांचा कापडाचा व्यवसाय आहे. आठवडाभर ते त्यांच्या कामात व्यस्त असतात; पण त्यांना सुटीचा दिवस आमच्याबरोबर घालवायला फार आवडतं. गणित हा त्यांचा अत्यंत आवडता विषय आहे आणि त्यांना आपल्या सभोवताली कोणत्याही बाबतीत गणित कुठे दिसते का, हे पाहायला आवडतं. त्यांच्यामुळे आम्ही कागदाचे कपटे, रेल्वेची तिकिटे, आलेखांचे कागद अशांचा उपयोग करून गणितातले बरेच खेळ आणि गमती शिकलो आहोत. या खेळांमुळे आमच्यात गणिताविषयी आवड वाढीस लागलेली आहे आणि गणिती विचार आम्हांला वर्गातल्या इतर विद्यार्थ्यांच्या मानाने पटकन जमतो.

आम्ही कधी काही वस्तू घरात विकत आणली, की तिचा उपयोग करून काहीतरी गणिती खेळ ते आम्हांला शिकवतात. आमच्या आता हे पक्कं लक्षात आलं आहे, की कुठल्याही खेळात गणिताचा काही ना काही तरी संबंध सापडतोच.

यंदाच्या म्हणजे 2004 या वर्षीच्या दिनदर्शिकेकडे मी पाहत होतो. आम्ही ऑगस्टमध्ये सहलीचा विचार करत होतो. मी पाहिले, की ऑगस्टच्या एक तारखेला रविवार आहे. ऑगस्ट महिन्यात आम्हांला आणि बाबांच्या व्यवसायाला बऱ्याच सुट्या होत्या. मी त्यांना विचारलं, ''दिनदर्शिकेतील ऑगस्टमधल्या 31 आकड्यांचा वापर करून काही खेळ तयार करता येईल का?'' बस. मी एवढं म्हणायचा अवकाश, दिनदर्शिकेतील बऱ्याच संख्यांचे गमतीचे खेळ बाबांनी तयार केले.

बाबा एखादी सूचना करायचे आणि तिच्यातून अनेक नमुने (Patterns), आकृतिबंध आम्हांला दिसायचे व आमचे आम्हीच शोध लावायचो. आता आम्ही आमच्या शोधांचीच ही कथा तुमच्यासमोर एका दिनदर्शिकेतील पानावर मांडतो आहोत आणि तुम्हाला आमच्याबरोबर हा खेळ खेळण्याचं आवाहन करत आहोत. आहात तयार? मी नक्की आश्वासन देतो, की तुम्हाला खूप मजा वाटणार आहे आणि खूप काही शिकायलाही मिळणार आहे. तर करूया सुरुवात?

सर्वात आधी बाबांनी आम्हांला सुशीलेच्या पाटीवर दिनदर्शिकेसारखी वाटणारी अशी पुढील संख्यारचना तयार करून दिली.

					1	2	3
4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31				

मग त्यांनी विचारलं, ''कुठल्याही एका महिन्याचे दिवस दिनदर्शिकेत असे मांडलेले दिसतील का?'' आधी आम्ही हा कागद दिनदर्शिकेशी जुळतो का हे पाहणार होतो; पण त्यांना लगेच सांगितलं, की तसं न करता फक्त पाटीच्या निरीक्षणाने उत्तर द्यायचं. आधी त्यांनी तसं सुशीलेस विचारलं, पण तिला काही चटकन उत्तर सुचेना. मग रविने म्हटलं, की आठवड्यात सातच दिवस असतात, तेव्हा दिनदर्शिकेच्या एका महिन्याच्या पानावर सातच संख्या असायला हव्यात. म्हणून पाटीवर दिलेली रचना दिनदर्शिकेत असणार नाही. मी म्हणालो, की एकाखाली एक अशा संख्यांमध्ये दिनदर्शिकेत सातचा फरक असतो; पण येथे तो फरक आठचा आहे, म्हणून हा तक्ता दिनदर्शिकेत बसणारा नाही.

अशा प्रकारे आमची दिनदर्शिकेची रपेट सुरू झाली.

2. झटपट बेरीज आणि सरासरी

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

बाबा : हा पहा ऑगस्ट 2004 या महिन्यातला दिनदर्शिकेतील तक्ता.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

रवि, आता मला कोणतीही एक रांग दाखव. मी त्या रांगेतील सर्व संख्यांची सरासरी चटकन सांगेन.

रवि : दुसरी रांग.

बाबा : अकरा.

प्रसाद : हं. कारण त्या रांगेतल्या पाच संख्यातली मधोमध असणारी संख्या अकरा आहे म्हणून का?

बाबा : हे बघ, आधी आपण हे ठरवायला हवं, की एखाद्या श्रेणीतील (sequence) संख्यांची सरासरी श्रेणीतील नेमक्या मधल्या संख्येएवढी केव्हा असणार. त्यासाठी दिनदर्शिकेतील संख्यांची श्रेणी कशी असते हे पहा. श्रेणी म्हणजे मालिका.

प्रसाद : आपणास रांगेतील संख्या, स्तंभातील संख्या आणि दोन्ही तिरक्या कर्णाच्या दिशेतील संख्या, अशा तीन प्रकारच्या श्रेणी मिळतात. यातील प्रत्येक संख्यानुक्रम गणितश्रेणीत आहे. त्यापैकी रांगेतल्या संख्या 1, 2, 3 अशा आहेत. इथे दोन सलग संख्यांतील सामान्य फरक (common difference) 1 आहे.

जसे $2 - 1 = 1$, $3 - 2 = 1$, $4 - 2 = 1$ याप्रमाणे

बाबा : आणि स्तंभातल्या संख्यांचा अनुक्रम?

रवि : त्या संख्या सातने वाढताहेत. उदाहरणार्थ, 1, 1 + 7 = 8, 8 + 7 = 15, इत्यादी म्हणजे इथे सामान्य फरक 7 आहे.

बाबा : आणि कर्णाचा क्रम?

प्रसाद : येथे दोन प्रकारे कर्ण आहेत. डावीकडून उजवीकडे खाली येणाऱ्या किंवा वायव्य-आग्नेय कर्णातील संख्या आठने वाढताहेत. जशा 1, 1 + 8 = 9, 9 + 8 = 17 इत्यादी आणि उलट्या बाजूने वरून खाली डावीकडे जाणाऱ्या किंवा ईशान्य-नैऋत्य कर्णातील संख्या सहाने वाढताहेत असं दिसतं. कारण 4 च्या खाली 4 + 6 = 10 आणि 10 च्या खाली 10 + 6 = 16 अशा संख्या आहेत.

बाबा : अशा अनुक्रमांना, ज्यात पुढची संख्या मागच्या संख्येत एक स्थिर असा सामान्य फरक मिळवून बनते, त्यांना आपण गणितश्रेणी असं नाव देतो.

रवि : बाबा, पहिल्या स्तंभातील संख्यांची सरासरी 15 असणार. हो ना?

बाबा : अगदी बरोबर. आता उलट विचार करा. या दिनदर्शिकेत नेमक्या दोन संख्याश्रेणींची सरासरी 17 आहे. त्या श्रेणी कोणत्या हे कसं ओळखाल? सांगा पाहू.

रवि : 3, 10, 17, 24 आणि 31 हा एक अनुक्रम आणि 5, 11, 17, 23 आणि 29 हा दुसरा अनुक्रम.

सुशिला : पण मग 15, 16, 17, 18, 19, 20 आणि 21 हा अनुक्रम का नाही? तोही याच दिनदर्शिकेत आहे.

रवि : कारण 17 ही संख्या या क्रमात मधोमध नाही म्हणून. पण बाबा, मला एक शंका आहे. असं म्हणता येईल का, गणितश्रेणीतील सर्व संख्यांची बेरीज करून, जेवढ्या संख्या घेतल्या असतील त्या आकड्याने या बेरजेस भागले तर येणारी सरासरी संख्या ही नेहमी मधलीच संख्या असते?

बाबा : करून पहा म्हणजे समजेल.

रवि : (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) / 7 = 28/7 = 4.

तसंच (1 + 8 + 15 + 22 + 29)/5 = 75/5 = 15 निदान या दोन बाबतीत तरी बरोबर तसंच दिसतंय.

बाबा : आता रविने जे केलं त्यामुळे जशी सरासरी काढता येते तशीच एकूण सर्व संख्यांची बेरीजही काढता येईल. आता कुठलीही रांग सांग.

सुशिला : दुसरी.

प्रसाद : 77, बरोबर ना?

रवि : अच्छा! म्हणजे एकूण सात संख्यांची सरासरी 11 आहे तर त्यांची बेरीज 77 असणार, असंच ना? पण मग चौथ्या स्तंभातील संख्यांची बेरीज कशी करायची?

बाबा : त्या स्तंभात मधली संख्या नाही, तरीसुद्धा मी उत्तर लगेच देऊ शकतो, 58.

सुशिला : 4 + 11 + 18 + 25 = 58 होय, बरोबर आहे उत्तर; पण तुम्ही ते कसं काढलं?

रवि : खरंच बाबा, कसं काढायचं हे उत्तर?

बाबा : येथे चार संख्या आहेत. अशा वेळी पहिली आणि शेवटची अशा संख्यांची बेरीज घ्यायची. 4 + 25 = 29. मग या बेरजेस एकूण संख्यांच्या निम्म्या संख्येने, म्हणजे जेवढ्या जोड्या आहेत तेवढ्याने गुणायचे. म्हणजे 29 × 2 = 58. हे झालं उत्तर.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

सुशिला : जेव्हा आकड्यांची संख्या विषम असते तेव्हा मधलं पद मिळतं; पण जेव्हा आकड्यांची संख्या सम असते तेव्हा मधली अशी कुठलीच संख्या नसते.

प्रसाद : जेव्हा गणितश्रेणतील पदांची संख्या विषम असते, तेव्हा मधले पद हीच त्या पदांची सरासरी असते. शिवाय त्या सरासरीस पदसंख्येने गुणले की सर्वांची बेरीज झाली; पण जर पदसंख्या सम असेल तर मग...

रवि : अशा वेळी मधलं पद नसतं; पण मग पहिली आणि शेवटीची संख्या यांच्या बेरजेस पदसंख्येच्या निम्म्या संख्येनं गुणायचं की बेरीज मिळेल.

बाबा : खरं तर पहिली आणि शेवटची संख्या यांचीच जोडी हवी असं नाही. वरून दुसरी आणि खालून दुसरी अशा संख्यासुद्धा चालतील. थोडक्यात काय, तर त्या दोन संख्यांच्या वरून आणि उलट दिशेने खालून क्रम सारख्याच अंतरावर असायला हवात. त्या संख्या समस्थित (equidistant) असाव्यात असं आपण म्हणू.

रवि : 4, 11, 18, 25 यापैकी 4 आणि 25 ही जोडी घेतली काय अगर 11 आणि 18 ही जोडी घेतली काय, बेरीज नेमकी 29 च येणार.

बाबा : छान! छान!

प्रसाद : नियम असा करता येईल, की **दोन्ही बाजूंनी समस्थित पदं घ्यावीत आणि त्यांच्या बेरजेस एकूण पदसंख्येला निम्म्याने गुणावं.**

बाबा : अगदी योग्य शब्दात नियम मांडलास. मी तुम्हा मुलांना गाउस या जर्मन गणितज्ञाची एक गोष्ट सांगितली का?

सुशिला : नाही बाबा. आधी ती गोष्ट सांगा.

बाबा : मग ऐका. जेव्हा गाउस तिसरीत होता तेव्हा एक दिवस त्याच्या शिक्षकांना वर्गातील मुलांना काहीतरी

उद्योगात तासभर गुंतवायचं होतं. त्यांनी मुलांना सांगितलं, की एक ते शंभर या संख्या पाटीवर लिहून त्या सर्वांची बेरीज करा. बेरीज करून पूर्ण झाली की पाटी टेबलावर ठेवायला शिक्षकांनी सांगितलं. गाउसला आधी हा प्रश्न आवडला. त्याने स्वत: बऱ्याच अशा प्रकारच्या गोष्टी कुणी न सांगता करून पाहिलेल्या होत्या. त्याने थोडा विचार केला आणि सर्व संख्यांची बेरीज 5050 अशी पाटीवर लिहिली आणि टेबलावर पाटी ठेवून दिली.

रवि : पण त्याने एक ते शंभर हे आकडे पाटीवर लिहिले का?

बाबा : नाही.

सुशिला : मग तर शिक्षक खूप रागावले असणार.

दादा : होय तर. शिक्षकांना राग तर आलाच; पण त्यांना कुतूहल होतं, की वर्गातल्या या हुशार मुलाने जरी झाले, तरी असं इतक्या झटकन उत्तर कसं काढलं? त्यांनी सरळच गाउसला विचारलं, की त्याला उत्तर इतक्या लवकर कसं आलं?

रवि : एक ते शंभर या संख्या लिहिल्या तर पहिली आणि शेवटची संख्या यांची बेरीज 101 अशी होते; आणि बेरजेसाठी पदांच्या संख्येच्या निम्म्याने म्हणजे पन्नासने तिला गुणलं की झालं. आलं उत्तर 5050.

प्रसाद : पण हे सगळं त्या तिसरीतल्या मुलाला सुचलं का?

बाबा : होय. आणि यातच त्याच्या बुद्धिमत्तेची झलक शिक्षकांना दिसून आली.

सुशिला : बापरे! म्हणूनच तो एवढा मोठा गणितज्ञ होऊ शकला असला पाहिजे.

प्रसाद : पण सम पदांच्या बेरजेसाठी पहिली आणि शेवटची यांच्या बेरजेस पदसंख्येच्या निम्म्याने गुणायचं आणि विषम पदांच्या श्रेणीसाठी मधली संख्या गुणिले पदसंख्या असे वगेवगळे नियमच लावायला हवे का? एकच नियम सम आणि विषम पदसंख्या अशा दोन्ही बाबतीत लागू पडत असता तर ते सोपं आणि छान वाटलं असतं. तसं करता येईल?

बाबा : छान प्रश्न विचारलास. त्यासाठी आता सात पदं असलेली दिनदर्शिकेतील दुसरी रांग पहा. 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ही ती रांग; पण या विषम संख्या पदावलीस आपण तीच पदावली पुढे लिहून सम संख्या करूया.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

रवि : म्हणजे 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 असं लिहावं लागेल.

बाबा : अगदी बरोबर. आता दोन्ही बाजूंकडून सारख्याच अंतरावरच्या सर्व जोड्यांची बेरीज नेमकी 22 येतं का ते पहा.

रवि : 8 + 14 = 22, 9 + 13 = 22, 10 + 12 = 22 वगैरे सर्व जोड्यांची बेरीज 22 आहे.

बाबा : अशा आपल्या पदावलीत एकूण किती जोड्या आहेत?

रवि : 7.

बाबा : मग आता या सात जोड्यांची बेरीज किती असेल?

सुशिला : $7 \times 22 = 154$ ही एकूण बेरीज असणार.

प्रसाद : होय. पण आपण दिलेली पदावली दोनदा घेतली आणि बेरीज 154 आली; पण जर एकाच पदावलीची बेरीज हवी असेल तर निम्मी म्हणजे 77 बेरीज येईल.

बाबा : आता लक्ष देऊन एका. 8 ही पहिली आणि 14 ही शेवटची संख्या आहे. यांची बेरीज 22 झाली. एकूण 7 पदं आहेत, म्हणजे पदावलीच्या बेरजेची दुप्पट 7×22 किंवा 154 होईल. आणि पदावलीची बेरीज हवी असेल तर $1/2 \times 7 \times (8 + 14)$ असं उत्तर येईल. आता आपणास हेच सूत्ररूपात मांडायचं असेल तर आपण म्हणू, की पदावलीत एकूण n संख्या असतील, पहिली संख्या a असेल आणि शेवटची संख्या i असेल, तर बेरीज किती असेल?

रवि : $1/2 \times n \times (a + i)$

प्रसाद : आणि जर पदसंख्या सम असेल तरी तेच सूत्र उपयोगी येईल. कारण आपण पाहिलंच, की जर 4, 11, 18, 25 ही पदावली असेल तर आपण पूर्वी लिहिले तसं 4, 11, 18, 25, 4, 11, 18, 25 अशी दोनदा पदं लिहून एकूण बेरीज $4 \times 29 = 116$ असणार आणि प्रत्यक्ष दिलेल्या पदावलीची बेरीज निम्मीच म्हणजे 58 होणार.

रवि : हे अधिक सोपं झालं. पण बाबा, तुम्ही सुरुवातीस सम आणि विषम संख्यांची वेगळी पद्धत दिली होती. असं का?

बाबा : या दोन वेगवेगळ्या पद्धती आहेत एवढंच. आता आपलं सूत्र आपण $1/2 \times n \times (a + i)$ असे लिहू शकतो किंवा $n \times (a + i) / 2$ असंसुद्धा लिहू शकतो.

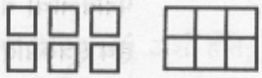
प्रसाद : आलं लक्षात. कारण $(a + i) / 2$ ही सरासरी आहे, ही विषम पदसंख्येच्या बाबतीत मधली संख्या असते आणि त्या सरासरीस, पदसंख्येने गुणलं की एकूण बेरीज येते. याउलट पदसंख्या सम असेल तर $(a + i)$ ही पहिल्या आणि शेवटच्या पदांच्या जोडीची बेरीज आणि $1/2 \times n$ ही मूळ पदावलीतील एकूण जोड्यांची संख्या. तेव्हा पहिली पद्धत काय अगर दुसरी पद्धत काय, सूत्र तेच राहिलं.

3. जादुई आयत आणि चौरस

बाबा : एखादी पुन:पुन्हा घडणारी किंवा दिसणारी संकल्पना गणितात असेल तर आपण तिला काय म्हणतो?

सुशिला : आपण तिला नमुना किंवा अभिरचना (pattern) किंवा आकृतिबंध म्हणतो.

बाबा : दिलेल्या छोट्या छोट्या चौरसांचा एक मोठा आयत कसा बनवता येईल?



सुशिला : हे पहा छोटे चौरस. मी त्यांचा असा आयत बनवीन.

बाबा : छान! अशा चौरसांनी बनलेल्या आयताच्या प्रत्येक चौरसात किंवा कोशात (cell) आपण एक आकडा लिहूया. आयताकृती आकृतीतील प्रत्येक रांगेत आणि स्तंभात सारखेच कोश आहेत. हे कोश जर आपण एकेक आकडा घालून भरले तर मिळणाऱ्या आकृतीस आयताकृती तक्ता किंवा सारिणी असं म्हणू.

सुशिला : ही पाहा. दिनदर्शिकेत दिसणारी एक आयताकृती सारिणी (matrix).

2	3	4	5
9	10	11	12

बाबा : हिला आपण 2 × 4 सारिणी असं म्हणू. ही दोन बाय चार अशी वाचतात. या सारिणीत दोन रांगा आणि चार स्तंभ आहेत. या संख्यांमध्ये तुम्हाला काही विशेष गुण किंवा जादू आहे असं वाटतं का?

सुशिला : समजलं. आता या सारिणीच्या प्रत्येक तिरक्या स्तंभातील 2+12, 3+11, 4+10, 5+9 अशा सर्व संख्यांची बेरीज कायम 14 येते, म्हणून या आयतास जादुई आयत म्हणता येईल. बरोबर?

रवि : आता मी या दिनदर्शिकेतील दुसरी एक सारिणी दाखवतो. ही 5 × 3 सारिणी आहे ना? कारण येथे पाच रांगा आणि तीन स्तंभ आहेत.

1	2	3
8	9	10
15	16	17
22	23	24
29	30	31

बाबा : बरोबर. या सारिणीत काय जादू आहे? एका वेळी फक्त दोन रांगा घेऊन त्यात वेगवेगळ्या रीतीने बेरजा पाहा. अशा पहिल्या दोन रांगांत 1 + 10 = 11, 3 + 8 =11, 2 + 9 = 11. तसंच दुसऱ्या आणि तिसऱ्या रांगेतील बेरजा पाहा. 8 + 17 = 25, 9 + 16 = 25, 10 + 15 = 25. पुढे जाऊन आणखी दोन-दोन रांगा घेऊन पाहा. 15 + 24 = 39, 16 + 23 = 39, 17 + 22 = 39, 22 + 31 = 53, 23 + 30 = 53, 24 + 29 = 53.

प्रसाद : आणखी गंमत म्हणजे, 11, 25, 39, 53 या क्रमाने येणाऱ्या जादुई बेरजासुद्धा 14 या फरकाने गणितश्रेणीत वाढताहेत असं दिसतं.

रवि : मी आता सारख्याच रांगा आणि स्तंभ असणारा आयत म्हणजे चौरस घेतो. हा पाहा.

5	6	7
12	13	14
19	20	21

बाबा : छान! चौरस सारिण्या तर विशेष प्रकारच्या असतात; पण आपण जे आज नाही, उद्याच्या बैठकीत घेऊ.

सुशिला : मग मी एक भला मोठा आयत घेते.

2	3	4	5	6	7
9	10	11	12	13	14
16	17	18	19	20	21
23	24	25	26	27	28

बाबा : या सारिणीचा आकार कोणता?

सुशिला : हिच्या चार रांगा आणि सहा स्तंभ आहेत.

बाबा : म्हणजे हिचा आकार 4 × 6 असा आहे. ठीक. या सारिणीत सापडतील त्या सर्व जादुई बेरजा करा बरं.

सुशिला : 2 + 28 = 30, 9 + 21 = 30, 3 + 27 = 30, 10 + 20 = 30, 4 + 26 = 30, 11 + 19 = 30, 5 + 25 = 30, 12 + 18 = 30, 6 + 24 = 30, 7 + 23 = 30, 14 +16 = 30.

प्रसाद : जर आपण या सारिणीतील लहान लहान आयताकृती उपसारिण्या घेतल्या तर अधिक जादुई बेरजा मिळतील.

बाबा : ते बरोबर आहे; पण सध्या एवढंच पुरे. बाकी आपण उद्या पाहू.

4. अपूर्ण जादुई सारिण्या

प्रसाद : आता आज आपण चौरस सारिण्या पाहणार आहोत.

बाबा : आधी सुशिलेस एक सारिणी निवडू दे.

रवि : कोणत्या आकाराची?

बाबा : आपण सुरुवातीस अगदी लहान म्हणजे 2 × 2 आकाराची सारिणी घेऊ.

सुशिला : ह्या दोन सारिण्या घेतल्या –

1	2
8	9

3	4
10	11

रवि : मग आणखी दोन का नकोत? ह्या घे, मी निवडलेल्या –

10	11
17	18

20	21
27	28

बाबा : या सर्व सारिण्या आपल्याला हव्या तशाच आहेत. आता यातील जादू काय ते पाहा.

1 + 9 = 10 3 + 11 = 14 10 + 18 = 28 20 + 28 = 48

2 + 8 = 10 4 + 10 = 14 11 + 17 = 28 21 + 27 = 48

प्रसाद : येथे फक्त कर्णावरील आकड्यांची बेरीज समान आहे. रांगा किंवा स्तंभ यातील बेरजा मात्र वेगवेगळ्या आहेत. आता आपण 3 × 3 किंवा तिसऱ्या कोटीच्या सारिणीचं (third order matrix) स्वरूप पाहू.

रवि : ही पाहा मी एक सारिणी बनवली आहे.

1	2	3
8	9	10
15	16	17

कर्णावरील आकड्यांची बेरीज 1 + 9 + 17 = 27 आणि 3 + 9 + 15 = 27 अशी समानच येते.

बाबा : शिवाय मधली रांग पाहा.

सुशिला : 8 + 9 + 10 = 27. मधल्या रांगेची बेरीजसुद्धा कर्णाएवढीच आहे. आता मधला स्तंभ पाहते. 2 + 9 + 16 = 27. वा! हीसुद्धा बेरीज तेवढीच आली. ही तिसऱ्या कोटीची सारिणी मजेदार आहे; पण पहिल्या आणि तिसऱ्या रांगेत हीच बेरीज आली असती तर अधिक मला वाटली असती. आणि पहिला आणि तिसरा स्तंभही तसाच असायला हवा होता.

बाबा : पण मग अशा चौरसास आपण अपूर्ण न म्हणता पूर्ण जादुई चौरस म्हणालो असतो.

रवि : अच्छा! म्हणून आपला चौरस अपूर्ण जादुई आहे होय? बाबा, पण मला या अपूर्ण जादुई चौरसाचा एक गुण लक्षात आला आहे. सर्व कर्ण मधली रांग आणि स्तंभ यांची बेरीज मधोमध असलेल्या कोशातील संख्येची तिप्पट असली पाहिजे.

प्रसाद : हे याच चौरसात आहे, की सर्व चौरसात असणार? मी दिनदर्शिकेतील आणखी एक चौरस पाहतो.

12	13	14
19	20	21
26	27	28

इथे मधली संख्या 20 आहे आणि हा तिसऱ्या कोटीचा चौरस आहे. म्हणजे जादुई बेरीज 20 × 3 = 60 असायला हवी. कर्णावरील संख्यांची बेरीज 12 + 20 + 28 = 60 आणि 14 + 20 + 26 = 60 अशीच येते.

सुशिला : मधल्या रांगेची बेरीज 19 + 20 + 21 = 60 आहे आणि मधल्या स्तंभाची बेरीज 13 + 20 + 27 = 60 च आहे.

प्रसाद : हे फारच आश्चर्यकारक आहे. आता आपण एखादी चौथ्या वर्गाची सारिणी बघायची का?

बाबा : होय. पण आता हे लक्षात असूद्या, की दिनदर्शिकेत पुढे जाऊन पाचव्या अगर सहाच्या वर्गाचा चौरस मिळणार नाही. तसं हवंच असेल तर आपल्याला 31 तारखेपर्यंत थांबून चालणार नाही; आणि 31 तारखेच्या पुढे जायचं असं ठरवलं तरी पुन्हा एका ठिकाणी थांबावंच लागेल. ती मर्यादा कोणती हे आलं का लक्षात?

रवि : ते कसं सांगता येईल? आधी तुम्ही कुठे थांबणार हे तर कळायला हवं ना?

सुशिला : दिनदर्शिकेत आठवड्याचे सात दिवस आहेत म्हणजे सातच स्तंभ आहेत. तेव्हा रांगा सातपेक्षा जास्त घेऊन काही उपयोग नाही. म्हणजे सातव्या वर्गाची सारिणी हीच मर्यादा असणार.

प्रसाद : फारच उत्तम. बाबा, हे बरोबर ना?

बाबा : अर्थातच. आता आपण आपली ऑगस्ट 2004 या महिन्याची दिनदर्शिका पाहू आणि त्यातला हवा तसा चौथ्या कोटीचा चौरस घेऊ.

रवि :

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28

ही पाहा, मी घेतलेली दिनदर्शिकेतील चौथ्या कोटीची सारिणी.

सुशिला : 4 + 12 + 20 + 28 = 64, 7 + 13 + 19 + 25 = 64

प्रसाद : 5 + 6 + 26 + 27 = 64, 11 +14 + 18 + 21 = 64,
12 + 13 + 19 + 20 = 64. 4 + 7 + 25 + 28 = 64.

बाबा : मुलांनो, तुम्ही काय करताय ते तुमच्या लक्षात आलं का? तुम्ही 32 बेरीज होणाऱ्या दोन जोड्या घेत आहात.

प्रसाद : होय. कालच्या जादुई आयतात अशी एकच जोडी आपण घेतली आहे.

रवि : बाबा, हाच चौरस आपणास संख्यांची अदालाबदल करून पूर्ण जादुई चौरस होईल अशी रचना करता येईल का?

बाबा : हा फारच चांगला प्रश्न आहे; आणि आपण याचा विचार करणार आहोतच. पण जर तुम्हाला अनुमानधपक्याने आधीच संपूर्ण जादुई चौरस शोधायचा असेल तर तसं करायला माझी काहीच हरकत नाही. एक मुद्दा मात्र तुम्ही विसरलेले दिसताय. तिसऱ्या कोटीच्या सारिणीत तुम्ही हे पाहिलं, की जादुई बेरीज मधल्या संख्येच्या तिप्पट होती. त्या संदर्भात या चौथ्या कोटीच्या सारिणीतील बेरीज कशी ठरवणार?

प्रसाद : या बाबतीत मधला असा कप्पा नसतो; पण जर विरुद्ध टोकाच्या बेरजेस दोनने गुणले तर जादुई बेरीज मिळते असं दिसतं. आता हा एक चौरस पाहा.

2	3	4	5
9	10	11	12
16	17	18	19
23	24	25	26

रवि : या बाबतीत जादुई बेरीज $(2 + 26) \times 2 = 56$ यायला हवी. ती तशीच येते.

सुशिला : पण मला तेच उत्तर 5 आणि 23 च्या बेरजेची, म्हणजे 28 ची दुप्पट करूनही मिळेल.

बाबा : अशाच अनेक वेगळ्या पद्धतीने ते उत्तर मिळेल.

रवि : समजा, मला या जादुई चौरसातल्या सर्व संख्यांची बेरीज करायची आहे, तर काही सूत्र असेल का?

बाबा : आधी हवा तो तिसऱ्या कोटीचा चौरस घे. त्यातली पहिली संख्या मला सांग. मी लगेच सर्व संख्यांची बेरीज सांगू शकेन.

सुशिला : मी एक चौरस निवडला आहे आणि तो 12 या संख्येपासून सुरू होतो.

बाबा : मग बेरीज 180 येणार.

सुशिला : पाहूया.

12	13	14
19	20	21
26	27	28

यातील स्तंभांची बेरीज 57, 60 आणि 63 येते आणि या तीन संख्यांची बेरीज बरोबर 180 येते.

रवि : म्हणजे मधल्या संख्येस 9 ने गुणायाचे. असंच ना?

सुशिला : पण मी पहिली संख्या दिली होती. मधली नाही.

रवि : हं. म्हणजे पहिल्या संख्येत आठ मिळवायचे आणि मग येणाऱ्या उत्तरास 9 ने गुणायचं. बरोबर?

प्रसाद : फारच छान! पण मग पहिली ऐवजी पहिल्या रांगेतील शेवटची संख्या दिली तरी चालेल. फक्त या बाबतीत त्या संख्येत सहा मिळवायचे आणि मग 9 ने गुणायचं.

बाबा : आता तुम्हाला या खेळाचं रहस्य उलगडलं आहे. छान! छान!!

प्रसाद : आता चौथ्या कोटीच्या चौरसाकडे पाहायला हरकत नाही. आता मला एका चौथ्या कोटीच्या चौरसाची पहिली संख्या सांगा आणि मी एकूण बेरीज ओळखण्याचा प्रयत्न करतो.

सुशिला : मी निवडलेल्या चौथ्या कोटीच्या चौरसातील पहिली संख्या 4 आहे.

प्रसाद : मग उत्तर 256 येईल.

सुशिला : करून पाहते.

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28

येथे स्तंभांच्या बेरजा : 58, 62, 66 आणि 70 आहेत. या चार संख्यांची बेरीज नेमकी 256 येते खरी.

रवि : थांब, मला या कोड्याचं उत्तर शोधू दे. 4 पासून सुरू होणाऱ्या चौरसात कर्णावरच्या संख्या आठने वाढतात हे मला ठाऊक आहे. आता आठ त्रिक चोवीस जर चारात मिळवले तर 28 ही शेवटची संख्या असणार. 4 आणि 28 या विरुद्ध संख्यांची बेरीज 32 झाली. या संख्येची दुप्पट म्हणजे 64 ही या चौरसातील जादुई बेरीज आहे. आणि सर्व संख्यांची बेरीज याच्या चौपट म्हणजे 256 असणार.

प्रसाद : हे अगदी बरोबर आहे.

5. क्रॉसचं कोडं

बाबा : दिनदर्शिकेतील संख्या-रचनेतून आपल्याला काही क्रॉसच्या आकाराची कोडी बनवता येतात.

सुशिला : आता आम्हांला तसले एखादं क्रॉसचं कोडं द्या. आम्ही ते सोडवू.

बाबा : एक तीन संख्यांचा स्तंभ आणि तीनच संख्यांची रांग यांना समाईक असा मधला कोश, एवढा आकार असल्यास त्या आकृतीस आपण तिसऱ्या कोटीचा क्रॉस म्हणू. हा क्रॉस अशा पद्धतीने भरायचा, की उभी आणि आडवी बेरीज सारखीच येईल.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

सुशिला : दिनदर्शिकेत अशी मला दोन तरी उदाहरणे चटकन दिसतात.

बेरीज 30

	3	
9	10	11
	17	

आणि

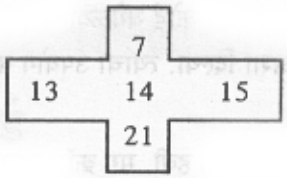
	13	
19	20	21
	27	

बेरीज 60

बाबा : छान! आता जर मी म्हटलं, की बेरीज 42 हवी, तर दिनदर्शिकेत तुम्हाला तसा क्रॉस शोधता येईल का?

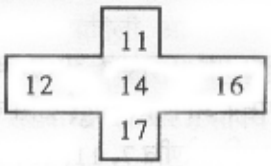
रवि : आधी मधली संख्या 42/3 म्हणजे 14 असायला हवी. आता त्या वरची संख्या 7 आणि खालची 21 हवी, कारण स्तंभातल्या संख्या सातने वाढतात. तसेच रांगेतील संख्येत एकचा फरक असतो, म्हणजे मधल्या संख्येच्या डावीकडे 13 आणि उजवीकडे 15 हवेत. म्हणजे तो क्रॉस असा असणार –

बेरीज 42



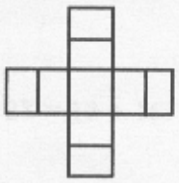
प्रसाद : अर्थात, दिनदर्शिकेत मधली संख्या दिली की वर-खाली सातचा फरक तर डावी-उजवीकडे एकचा फरक हवा. पण दिनदर्शिका न घेता इतर ठिकाणी वेगळी उत्तरे असू शकतात. उदाहरणार्थ, याच 14 या मधल्या संख्येसोबत वरची-खालची संख्या तीनच्या फरकाने 11 आणि 17 घेता येईल आणि डावी-उजवीकडे दोनच्या फरकाने 12 आणि 16 घेता येईल; आणि हा क्रॉस असा असेल -

बेरीज 42



रवि : आता आपण वेगळ्या कोटीचा क्रॉस घ्यावा का?

प्रसाद : आपण तीन नंतर पाचव्या कोटीचा क्रॉस घेऊ शकतो. मधली संख्या नसल्यामुळे चौथ्या कोटीचा क्रॉस नसणार. पाचव्या कोटीचा क्रॉस असा दिसेल.

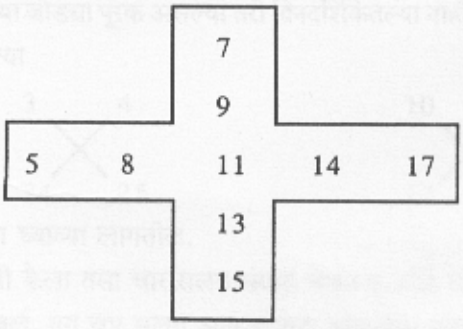


सुशिला : दिनदर्शिकेतील संख्यांमध्ये अशा क्रॉसचं कोडं मला नाही जमायचं.

रवि : बरोबर. पण मला बेरीज किंवा मधली संख्या दे,
आणि मी बनवेन पाचव्या कोटीचा क्रॉस.

प्रसाद : ठीक. बेरीज 55 दिली.

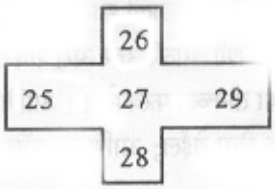
रवि : म्हणजे मधली संख्या 55 च्या एक-पंचमांश किंवा 11 आली. आता वर दोन-दोन कमी करून 9 आणि 7 घ्यावेत आणि रांगेत तीनचा फरक ठेऊन 8 आणि 5 डावीकडे तर 14 आणि 17 उजवीकडे. म्हणजे उत्तर असं येईल -



रवि : मला दुसरीच एक रीत सुचतेय. आपण दोन गणितश्रेणीतल्या पाच-पाच संख्या अशा घ्याव्या, की दोघांची मधली संख्या समान असेल.

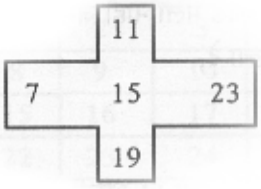
बाबा : फार सुंदर कल्पना आहे. आता आपण आपलं कोडं वगेळ्या पद्धतीने मांडू. पाच सलग संख्या, उदाहरणार्थ 25, 26, 27, 28, 29 अशा दिल्या. त्यांचा उपयोग करून तिसऱ्या कोटीचा क्रॉस बनवाल का?

रवि : मधली संख्या 27 मधोमधच्या कोशात घ्यायला हवी. मग क्रॉस असा बनेल –



प्रसाद : रवि, तू भलताच हुशार आहेस. तुझा मुद्दा माझ्या लक्षात आला. आपण जर फरक एक आणि दोनचा घेतला तर पाच सलग संख्या वापरून आपणास जादुई क्रॉस बनवता येईल; पण त्या पाच संख्या सलगच हव्या असे काही नाही. त्या गणितश्रेणीत 7, 11, 15, 19, 23 अशासुद्धा असायला हरकत नाही.

सुशिला : मी प्रयत्न करून पाहते.



मला सुद्धा जमलं.

6. ताऱ्याचं कोडं

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

बाबा : आपण क्रॉसची कोडी पाहिली. आता आपण ताराकृती कोडी पाहू. हे पुढील चित्र दुसऱ्या कोटीच्या ताऱ्याचं आहे. येथे जर कर्णावरील बेरजा सारख्या हव्या असतील तर काय करावं लागेल?

सुशिला : दिनदर्शिकेतील संख्यांच्या आधारे हे सोपेच आहे. हा एक तारा पाहा, ज्यात बेरीज दहा येते.

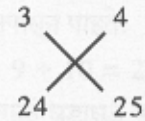
रवि : जर तुम्ही मला बेरीज काय हवी ते सांगितलं तर मी तसा तारा शोधीन.

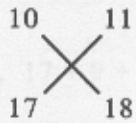
बाबा : मला 28 बेरजेचा तारा हवा आहे.

रवि : 28 ही संख्या दोन संख्यांची दोन पद्धतीची बेरीज यायला हवी. $28 = 20 + 8$, $28 = 12 + 16$. म्हणजे तारा असा मांडता येईल.

बाबा : 20 आणि 8 ही 28 बेरजेसाठी जशी पूरक जाडी आहे तशीच 12 आणि 16 ही पूरक जोडी आहे, अशा शब्दात हे वर्णन करता येईल.

सुशिला : पण या जोड्या पूरक असल्या तरी दिनदर्शिकेतल्या नाहीत. तेव्हा दिनदर्शिकेत जोड्या हव्या असतील तर त्या



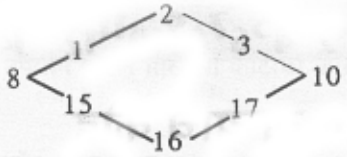


अशा घ्याव्या लागतील.

रवि : आधी केला तसा चार सलग संख्या घेऊन हे कोडं सोडवायचा विचार करावा का?

सुशिला : समजलं. मग चार सलग आकड्यांचा असा तारा बनवता येईल. म्हणजे मध्यापासून सारख्या अंतरावरच्या जोड्या घ्याव्या लागतील.

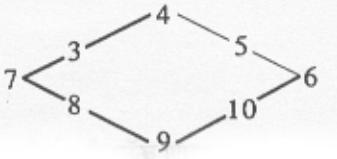
प्रसाद : छान! आता आपण तिसऱ्या कोटीचा तारा कसा बनवावा हे पाहू.



रवि : ही तर तिसऱ्या कोटीच्या जादुई चौरसातील मधली संख्या काढून टाकली की मिळणारी आकृती आहे.

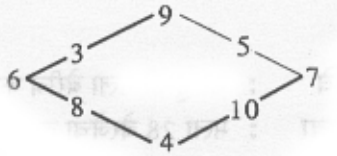
प्रसाद : बाबा, असं म्हणता येईल का, की ताऱ्याची कोटी म्हणजे त्या आकृतीत आवश्यक अशा पूरक जोड्यांची संख्या?

बाबा : निश्चितच असं म्हणायला हरकत नाही. आता पाहा. मी तुम्हाला 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 अशा आठ सलग संख्या देतो. आता या संख्या वापरून चौथ्या कोटीचा जादुई तारा तुम्हाला बनवता येईल का?



रवि : सारख्या अंतरावरच्या पूरक जोड्या आहेत – (3, 10) (4, 9) (5, 8) (6, 7) मग असा तारा बनेल.

प्रसाद : 3, 4, 5, 6 या चार सलग संख्या या ताऱ्यात सलग कोशात आहेत आणि 7, 8, 9, 10 या संख्याही कोशात सलगच पण उलट्या क्रमाने आल्या आहेत.



बाबा : त्या तशाच यायला हव्यात असा नियम असेल का?

रवि : असं काही वाटत नाही, कारण हा तारा असाही बनवता येईल.

प्रसाद : छान! पण मला ही उलट आणि सुलट रचना अधिक आवडली. पूर्वीप्रमाणेच आपणास आठ गणितश्रेणीतल्या संख्यांचाही तारा बनवता येईल.

7. संपूर्ण जादुई चौरस

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

बाबा : आता आपण रविच्या प्रश्नाकडे वळूया. एका अपूर्ण जादुई चौरसातल्या संख्या वेगळ्या प्रकाराने रचून आपणास जादुई चौरस बनवता येईल का?

सुशिला : म्हणजे रांगा, स्तंभ आणि दोन कर्ण या सर्वांची बेरीज सारखी यायला हवी, असं ना?

बाबा : होय. आता या कामाला तुम्ही लागा.

रवि : म्हणजे खूपच मजा येईल.

बाबा : आधी आपण दुसऱ्या कोटीचा चौरस पाहू.

सुशिला : हा चौरस आपण आधी पाहिलेला आहे.

1	2
8	9

पण हा संपूर्ण जादुई चौरस करता येईल असं वाटत नाही.

रवि : होय. सुशिला म्हणते ते बरोबर आहे. या सख्यांचा संपूर्ण जादुई चौरस बनणं अशक्य आहे.

प्रसाद : मग आता आपण तिसऱ्या कोटीचा चौरस घेऊ.

1	2	3
8	9	10
15	16	17

सुशिला : मी तपासून पाहते.

$8 + 9 + 10 = 27,\ 2 + 9 + 16 = 27,\ 17 + 9 + 1 = 27,\ 3 + 9 + 15 = 27.$

रवि : हे सगळं धडाधड करतेस.

सुशिला : तसं काही नाही. हा तर दिनदर्शिकेतल्या गणितश्रेणीतल्या संख्यांचा चौरस आहे. म्हणजे या सर्व बेरजा मधल्या संख्येच्या तिप्पट असणार हे आपण आधीच पाहिलं आहे.

रवि : मग ही जादुई बेरीज 27 यायला हवी. आता या संख्यांची अदलाबदल कशी करायची? बाबा, आम्हांला काही मदत करा ना!

बाबा : तुम्हाला अनमानधपक्याने हे करता येईल, पण त्याला खूपच वेळ लागेल; पण सोपं करण्यासाठी एक अशी संरचना आहे जी या सारिणीत लपलेली आहे. ती आधी समजून घ्यायला हवी. आता आधी विचार करा, की 1, 2, 3 पासून 8, 9, 10 या संख्या कशा मिळतात?

सुशिला : 1, 2 आणि 3 या आकड्यांत प्रत्येकी 7 मिळवून 8, 9 आणि 10 हे नवीन आकडे मिळतात.

रवि : तशाच 1, 2, 3 मध्ये प्रत्येकी 14 मिळवून 15, 16, 17 या संख्या मिळतात.

बाबा : आणि 1, 2, 3 पासून 1, 2, 3 या संख्या कशा मिळतात?

सुशिला : म्हणजे काय हो बाबा? त्यात तर काहीच न मिळवता, किंवा 0 मिळवून या संख्या मिळतात.

बाबा : म्हणजे आपणास दोन वेगळे असे चौरस बनवायला हवेत. ज्यांना लॅटिन चौरस म्हणतात. त्यातला एक 1, 2, 3 या संख्या घेऊन आणि दुसरा 0, 7, 14 या संख्या घेऊन बनवायचा आहे.

प्रसाद : ही लॅटिन चौरस काय भानगड आहे?

बाबा : मी तेच सांगणार आहे. लॅटिन चौरसाच्या प्रत्येक रांगेत आणि स्तंभात त्याच संख्या असतात; पण अशा तऱ्हेने मांडलेल्या असतात, की एका रांगेत अगर स्तंभात कुठलीही संख्या एकदाच आली पाहिजे.

रवि : आणि मग कर्णाचं काय?

बाबा : आपण कर्णाचा विचार तूर्त सोडून देऊ. एखादी संख्या कर्णावर अधिक वेळा आली तरी चालेल.

सुशिला : रांगा आणि स्तंभांची बेरीज सारखी यावी लागेल का?

बाबा : होय; पण कर्णावरील बेरजेचा मात्र सध्या विचार नको.

रवि : दुसऱ्या वर्गाचा लॅटिन चौरस अगदीच सोपा आहे. हा पहा :

1	2
2	1

सुशिला : मी तिसऱ्या वर्गाचा लॅटिन चौरस बनवणार आहे. आधी 1, 2, 3 या संख्या कर्णावर मांडते.

1		
	2	
		3

मग बाकी संख्या प्रयत्न करत आणि चुकत-माकत जमतील.

1	3	2
3	2	1
2	1	3

हे काय, जमलंच मला.

रवि : आता मी 0, 7 आणि 14 यांचा असाच लॅटिन चौरस बनवतो.

0	14	7
14	7	0
7	0	14

सुशिला : बाबा, रविने अगदी माझ्याचसारखा चौरस बनवला आहे.

प्रसाद : हो, खरं आहे ते. त्याने 1 च्या ठिकाणी 0, 2 च्या ठिकाणी 7 आणि 3 च्या ठिकाणी 14 अशी मांडणी केली आहे.

बाबा : छान! आता एक नवीन चौरस बनवायचा. ज्यातला संख्या सबंद्ध (corresponding) संख्यांच्या बेरजा असतील.

सुशिला : म्हणजे तुम्ही म्हणताय की, 1 व 0, 2 व 7 आणि 3 व 14 असं लिहायचं.

1+0	3+14	2+7
3+14	2+7	1+0
2+7	1+0	3+14

अशी बेरीज करावी.

1	17	9
17	9	1
9	1	17

रवि : असाच आणखी एक लॅटिन चौरस बनवायचा का बाबा?

बाबा : आता 0, 7 आणि 14 चा वेगळ्या पद्धतीने लॅटिन चौरस बनवून मग दोन चौरसातल्या सबंद्ध संख्यांची बेरीज करून काय होते ते पाहा.

प्रसाद : मला प्रयत्न करू दे. आधी सुशिलाने डावीकडून उजवीकडे जाणारा कर्ण भरला होता. मी आता उलट जाऊन पाहतो.

		0
	7	
14		

आता संपूर्ण चौरस बनवता येईल तो असा :

7	14	0
0	7	14
14	0	7

रवि : आता मी बेरजा करून लॅटिन चौरस बनवतो.

8	17	2
3	9	15
16	1	10

पण हा काही लॅटिन चौरस नाही. कारण सर्व संख्या वेगवेगळ्या आहेत. हा जादुई चौरस तर नसेल ना?

प्रसाद : बरोबर आहे. आणि हे सर्व आकडे तर दिनदर्शिकेतल्या आपण सुरुवात केलेल्या चौरसातलेच आहेत. फक्त वेगळी रचना करून लिहिलेले आहेत; पण हा अपूर्ण की संपूर्ण जादुई चौरस बरं?

सुशिला : मी तपासते.

$8 + 17 + 2 = 27$, $16 + 1 + 10 = 27$, $8 + 3 + 16 = 27$, $2 + 15 + 10 = 27$, $3 + 9 + 15 = 27$, $17 + 9 + 1 = 27$, $8 + 9 + 10 = 27$, $2 + 9 + 16 = 27$. वा, वा! हा तर संपूर्ण जादुई चौरस झाला.

बाबा : एवढंच पाहू नकोस. हे सर्व तर आहेच; पण या चौरसात आणखीही काही नवे गुण आहेत.

सुशिला : ते कोणते बाबा?

बाबा : प्रत्येक कोशातल्या संख्येचा वर्ग करून त्याच कोशात लिहून पाहा, काय होते ते.

रवि : हे काम मी करतो.

	स्तंभ↓		
रांग→	64	289	4
	9	81	225
	256	1	100

प्रसाद : हासुद्धा जादुई चौरस असू शकेल काय? हा संपूर्ण जादुई चौरस नाही हे माझ्या लक्षात आलं आहे; पण कदाचित हा आणखी वेगळ्याच प्रकारचा अपूर्ण चौरस आहे असं दिसतं.

बाबा : म्हणजे तुला नेमकं काय म्हणायचंय?

प्रसाद : येथे मधली रांग (315), मधला स्तंभ (371) आणि दोन कर्ण (245, 341) यांच्या बेरजांऐवजी कडेच्या दोन रांगांतील बेरीज 357 तर कडेच्या दोन स्तंभांत वेगळीच बेरीज 329 येत आहे.

बाबा : पण आपल्याला एकच संख्या (64 + 9 + 256 = 4 + 225 + 100 = 329, 64 + 289 + 4 = 256 + 1 + 100 = 357) दोन वेगळ्या पद्धतीने तीन वर्गांची बेरीज म्हणूनही लिहिता येते ना?

रवि : हो. ही मात्र एक वेगळीच गंमत आहे.

प्रसाद : चौथ्या कोटीच्या चौरसातही आपल्याला अपूर्ण चौरसातून संपूर्ण जादुई चौरस बनवता येईल काय?

बाबा : नक्कीच ते तुम्हाला जमेल.

प्रसाद : बाबा, हे पाहा.

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

आता 1, 2, 3, 4 या संख्या आणि पूर्वीप्रमाणे 0, 7, 14, 21 या संख्या घ्यायच्या ना? त्यांना काय नाव आहे?

बाबा : 1, 2, 3, 4 यांना प्राथमिक संख्या आणि 0, 7, 14, 21 यांना आपण पायाभूत संख्या असे म्हणू.

प्रसाद : आधी आपण प्राथमिक संख्यांचा लॅटिन चौरस बनवू. म्हणजे मग पायाभूत संख्यांचा लॅटिन चौरस बनवता येईल.

सुशिला : पण इथे मधला कोशच नाही. मग कशी सुरुवात करायची?

रवि : मी प्रयत्न करून पाहतो.

पहिली रांग →

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

प्रसाद : हे छान आणि झटपट काम झालंय. या चौरसात 4 ही संख्या उजवीकडून डावीकडे खाली जात आहे. तेव्हा 0, 7, 14, 21 या पायाभूत संख्यांचा लॅटिन चौरस डावीकडून उजवीकडे खाली जाणारी स्थिर संख्या घेऊन बनवावा.

21	0	7	14
14	21	0	7
7	14	21	0
0	7	14	21

शेवटची रांग →

यातल्या पहिल्या प्राथमिक संख्यांच्या चौरसात 1, 2, 3, 4 हे पहिल्या रांगेत, तर पायाभूत संख्यांच्या चौरसात 0, 7, 14, 21 या संख्या शेवटच्या रांगेत आहेत. आता या दोन चौरसांतून संपूर्ण जादुई चौरस बनतो का ते पाहूया.

रवि : मला करू दे ते काम. मी एकदम बेरजा करूनच उत्तर लिहितो.

22	2	10	18
16	24	4	8
10	18	22	2
4	8	16	24

पण हा चौरस काही वेगळाच आहे.

सुशिला : या चौरसात तर 24, 8, 18, 10 हे सगळेच आकडे दोनदोनदा आले आहेत. शिवाय कर्णावरील संख्यांची बेरीज जमत नाही. हा तर अपूर्ण जादुई चौरससुद्धा नाही असं दिसतं आहे.

प्रसाद : आणि अर्थातच हा लॅटिन चौरससुद्धा नाही. बाबा, हे काम काही जमत नाही.

बाबा : मुलांनो, लॅटिन चौरस बनवण्याचे वेगवेगळे प्रकार आहेत. मी आधी तुम्हाला योग्य असा लॅटिन चौरस बनवून देतो. आधी 1, 2, 3, 4 या प्राथमिक संख्या घ्या आणि असा चौरस बनवा –

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

प्रसाद : हो, हा तर एक लॅटिन चौरस आहे हे खरं. जर मी दुसरा लॅटिन चौरस पायाभूत संख्यांचा – 1, 2, 3, 4 या जागी 0, 7, 14, 21 घेऊन बनवला तर चालेल का?

रवि : करून पाहूया.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

या चौरसाचा पुढचा पायाभूत संख्यांचा चौरस मिळवायचा :

0	7	14	21

प्रसाद : थांब, घाई करू नको. आपण या दुसऱ्या लॅटिन चौरसात वेगळी रचना वापरायला हवी हे निश्चित.

रवि : बरं, मग आपण नमुना बदलूया.

प्रसाद : म्हणजे अशीच संख्यांची अदलाबदल करायची म्हणतोस काय?

रवि : होय. मी पहिल्या चौरसाची दुसरी रचना अशी घ्यायची म्हणतोय :

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

आणि याच रचनेत आता पायाभूत संख्या वापरतो :

0	14	7	21
7	21	0	14
14	0	21	7
21	7	14	0

प्रसाद : छान! चला जाऊया पुढे. एकेका घरातल्या संख्यांची बेरीज करून आपणास हा चौरस मिळतो.

1	16	10	25
10	25	1	16
16	1	25	10
25	10	16	1

प्रसाद : हा तर फक्त लॅटिन चौरस झाला 1, 10, 16 आणि 25 या आकड्यांचा.

बाबा : हे पाहा, तुम्हाला मी दिलेला लॅटिन चौरस आणि त्यातील प्राथमिक संख्यांची रचना नीट तपासून पाहवी लागेल.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

प्रसाद : आता माझ्या लक्षात आलं. हा चौथ्या वर्गाचा चौरस तोडून जर आपण चार दुसऱ्या वर्गाचे चौरस बनवले तर ते असे दिसतील :

1	2	3	4	2	1	4	3
3	4	1	2	4	3	2	1

या प्रत्येक चौरसात कर्णाची बेरीज 5 आहे. यापैकी पहिला आणि तिसरा चौरस हे आरशातील प्रतिबिंबाप्रमाणे आहेत आणि दुसरा व चौथा चौरस ही एकमेकांची परावर्तने आहेत. मूळ चौथ्या कोटीच्या चौरसात हे प्रतिबिंबित चौरस एकमेकांखाली आहेत.

बाबा : छान! मग जर आपणास 0, 7, 14, 21 या संख्यांचा वेगळ्या रचनेचा चौरस बनवायचा असेल तर तो कसा बवनशील?

रवि : कर्णावरील बेरजा सारख्याच नकोत; पण रांगा आणि स्तंभ मात्र एका बेरजेच्या हव्यात, असंच का?

बाबा : 1, 2, 3 आणि 4 या संख्यांची समान अंतरिय रचना लक्षात असू दे. त्यामुळेच कर्णावरील बेरजा समान येतात.

प्रसाद : म्हणजे आम्ही (0, 21) आणि (7, 14) अशा जोड्या लक्षात ठेवाव्यात.

रवि : आता आपण चार छोटे चौरसच बनवूया. ते असे बनतील ना?

0	21	7	14	21	0	14	7
21	0	14	7	0	21	7	14

बाबा : छान! आता या चौघांचा मिळून चौथ्या कोटीचा लॅटिन चौरस कसा बनवाल?

प्रसाद : आपण दोन-दोन चौरस तिरके बसवायला हवेत. म्हणजे आधी आकृती –

				21	0		
				0	21		
0	21						
21	0						

अशी बनेल आणि संपूर्ण चौरस –

0	21	14	7
21	0	7	14
7	14	21	0
14	7	0	21

असा बनेल आणि याची 1, 2, 3, 4 यांच्या चौरसाशी बेरीज करून

1	23	17	11
24	4	8	16
9	15	25	3
18	10	2	22

असा चौरस मिळतो.

प्रसाद : बाबा, मिळाला संपूर्ण जादुई चौरस. यात सर्व रांगा, स्तंभ आणि कर्णाची बेरीज 52 आहे. बाबा, पण एक शंका आहे. दिनदर्शिकेत सात दिवसांचा आठवडा असतो म्हणून पायाभूत संख्या 0, 7, 14, 21 अशा येणार आणि सलग संख्या 1, 2, 3, 4 अशा येणार. पण सातऐवजी दुसऱ्या संख्येच्या पटी घेऊन संपूर्ण जादुई चौरस बनवता यायला पाहिजे नाही का? म्हणजे 0, 6, 12, 18 किंवा 0, 4, 8, 12 अशा संख्यासुद्धा घेता यायला हव्यात.

बाबा : का नाही येणार? करून पाहा.

सुशिला : मी तिसऱ्या कोटीचा चौरस बनवीन – 1, 2, 3 आणि 0, 4, 8 या संख्या वापरून.

रवि : आणि मी चौथ्या कोटीचा बनवेन – 1, 2, 3, 4 आणि 0, 6, 12, 18 वापरून.

प्रसाद : चला करा सुरुवात.

सुशिला :

1	3	2
3	2	1
2	1	3

आणि

4	8	0
0	4	8
8	0	4

यांची बेरीज करून

5	11	2
3	6	9
10	1	7

हा चौरस मिळाला. आणि हा संपूर्ण जादुई चौरस आहे हे जर तोंडी बेरजा करून लगेच दिसते. बेरीज आहे 18.

रवि : आणि मी दोन चौरस आधी बनवणार ज्यांच्या संख्या असणार आहेत 1, 2, 3, 4 आणि 0, 6, 12, 18 या दोन चौरसांची बेरीज करायची आणि पाहायचं, संपूर्ण जादुई चौरस मिळतो का ते.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

आणि दुसरा चौरस आहे –

0	18	12	6
18	0	6	12
6	12	18	0
12	6	0	18

आणि या दोघांची बेरीज आहे –

1	20	15	16
21	4	7	14
8	13	22	3
16	9	2	19

मलाही संपूर्ण जादुई चौरस मिळाला. येथे सर्व रकान्यांची बेरीज 46 आहे.

बाबा : पण एक लक्षात ठेवा, 6 ऐवजी 7 चालेल अगर 8 चालेल, पण 4 पेक्षा कमी संख्या म्हणजे 3 वगैरे चालणार नाही. म्हणजे प्राथमिक संख्यातली सर्वात मोठी संख्या पायाभूत संख्यांतील दुसऱ्या संख्येपेक्षा लहान किंवा निदान सारखी हवी.

प्रसाद : मुद्दा लक्षात आला माझ्या, कारण नाहीतर अपूर्ण जादुई चौरससुद्धा अर्धामुर्धाच जमेल. उदाहरणार्थ, तिसऱ्या कोटीच्या चौरसासाठी आपणास अशा संख्या मिळतील.

1	2	3
3	4	5
5	6	7

रवि : पण मला एक छान कल्पना सुचली आहे. जर दुसरी पायाभूत संख्या शेवटच्या प्राथमिक संख्येपेक्षा मोठी अगर लहान न घेता तेवढीच घेतली, तर सारिणीतल्या संख्या अशा येतील.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

प्रसाद : बाबा, आता या सलग सोळा संख्यांचा संपूर्ण जादुई चौरस कसा करायचा हे मी सांगू शकेन. प्रत्येक कर्णावरील समान अंतरावरच्या संख्यांची अदलाबदल करावी लागेल.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

हीच पद्धत वापरून दिनदर्शिकेतील चौरसातही अदलाबदल करून संपूर्ण जादुई चौरस नाही का बनवता येणार?

बाबा : करून बघ म्हणजे समजेल.

रवि : दिनदर्शिकेतला हा तुकडा आधी घ्यायचा.

1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25

हा अपूर्ण जादुई चौरस आहे. आता (1, 25), (9, 17), (4, 22), (10, 16) या जोड्यांची अदलाबदल केल्यावर मिळेल.

25	2	3	22
8	17	16	11
15	10	9	18
4	23	24	1

आणि हा तर संपूर्ण जादुई चौरस आहेच. सर्व रकान्यातील बेरीज 52 येते.

प्रसाद : आपण आता या संख्यांचे वर्ग घेऊन पाहायचे काय?

बाबा : मी ते म्हणणारच होतो. तेव्हा पहा काय होते ते. मोठाल्या संख्या येतील, पण हरकत नाही.

रवि : मी माझ्या गणनयंत्राने बेरजा संख्या काढतो. किंवा बेरीज करणे सोपेही आहे.

625	4	9	484
64	289	256	121
225	100	81	324
16	529	576	1

625 + 4 + 9 + 484 = 1122, 64 + 289 + 256 + 121 = 730, 225 + 100 + 81 + 324 = 730, 16 + 529 + 576 + 1 = 1122, 625 + 64 + 225 + 16 = 930, 4 + 289 + 100 + 529 = 922, 9 + 256 + 81 + 576 = 922, 484 + 121 + 324 + 1 = 930, 625 + 289 + 81 + 1 = 996, 484 + 256 + 100 + 16 = 856. येथे कडेच्या दोन रांगांची बेरीज सारखी, तर मधल्या दोन रांगांची बेरीज सारखी आहे. तसेच शेवटचे दोन स्तंभ आणि मधले दोन स्तंभ यांचेही आहे. कर्णाच्या बेरजा मात्र वेगवेगळ्या.

प्रसाद : बाबा, तुम्ही म्हणालात तशा चार वर्गांच्या सारख्या बेरजा येथेसुद्धा आपणास दोन प्रकारे मिळतात.

रवि : बाबा, समजा आपण वर्ग न घेता संख्यांचे घन घेतले तर काय होईल?

प्रसाद : मला तेच करून पाहायचं होतं; आणि मी सुरुवात केली आहे.

15625	8	27	10648
512	4913	4096	1331
3375	1000	729	5832
64	12167	13824	1

15625 + 8 + 27 + 10648 = 26308, 512 + 4913 + 4096 + 1331 = 10852, 3375 + 1000 + 729 + 5832 = 10936, 64 + 12167 + 13824 + 1 = 26056, 15625 + 512 + 3375 + 64 = 19576, 8 + 4913 + 1000 + 12167 = 18088, 27 + 4096 + 729 + 13824 = 18676, 10648 + 1331 + 5832 + 1 = 17812, 15625 + 4913 + 729 + 1 = 21268, 10648 + 4096 + 1000 + 64 = 15808. बापरे! बाबा, एकही बेरीज दुसरीसारखी दिसत नाही. हे भलतंच अनपेक्षित काहीतरी झालंय.

बाबा : इतकी घाई करून निष्कर्ष काढू नकोस. थोडा आणखी अभ्यास करून पाहा.

रवि : हं. म्हणजे आपण वेगळ्या पद्धतीने जादुई चौरस बनवावा असं दिसतं. दुसरी एखादी पद्धत असेलच ना?

बाबा : चांगला प्रश्न आहे. आपल्या चौरसात आपण जशा कर्णावरच्या संख्यांची अदलाबदल केली तशीच छोट्या कर्णाची कल्पना करून जे (2, 24)...

सुशिला : म्हणजे (3, 23), (8, 18) आणि (15, 11) अशा जोड्या घ्याव्यात ना?

रवि : म्हणजे मग आपला चौरस

1	24	23	4
18	9	10	15
11	16	17	8
22	3	2	25

असा बनेल.

सुशिला : पण तो जादुई आहे ना?

रवि : पहा की, सर्व रकान्यातील बेरजा आधीसारख्याच बरोबर 52 येताहेत.

बाबा : मी अशी सूचना करतो, की मधले दोन स्तंभ बदलून पाहा काय होतंय ते.

रवि : रांगा आणि स्तंभ यांची बेरीज आहे तशीच राहणार यात शंका नाही. फक्त कर्ण तपासायला हवेत; आणि तेही जमताहेत, कारण कर्णावरील मधल्या जोडीची बेरीज बदललेली नाही.

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

हा संपूर्ण जादुई चौरसा जमला.

प्रसाद : आता आपल्याला या चौरसातील संख्यांचे घन घ्यायचेत. होय ना बाबा?

बाबा : पाहा करून.

प्रसाद : विशेष फरक पडेल असे वाटत नाही.

बाबा : खरंय, पण एक नवीन लक्ष देण्यासारखी गोष्ट आहे ती ध्यानात घ्या.

रवि : कोणती बाबा?

बाबा : चौरसाच्या प्रत्येक बाजूचा मध्यबिंदू घ्या व ते चार बिंदू जोडून येणारी आकृती पाहा.

रवि : म्हणजे अशी आकृती ना?

1	23	24	4
18	10	9	15
11	17	16	8
22	2	3	25

बाबा : हो. तुम्हाला आकृती जमली.

सुशिला : पण त्याचा काय उपयोग?

प्रसाद : बहुतेक आपण मधल्या चौरसाच्या विरुद्ध बाजूंवरील संख्यांची बेरीज करावी.

बाबा : खूप हुशार आहेत. पाहा करून.

प्रसाद : त्यांच्या वर्गांची आणि घनांचीसुद्धा बेरीज पाहावी. कर झटपट.

सुशिला : $18^2 + 23^2 + 3^2 + 8^2 = 926$, $24^2 + 15^2 + 11^2 + 2^2 = 926$

$18^3 + 23^3 + 3^2 + 8^3 = 18538$, $24^3 + 15^3 + 11^3 + 2^3 = 18538$.

बाबा : पाहा, किती छान गुप्त खजिना सापडलाय ना? आता दिनदर्शिकेतील चौरस घेऊन त्यातल्या संख्या बदलल्या तर असं काही सापडतंय का पाहा.

सुशिला : बाबा, मला ठाऊक आहे 1 ते 9 सलग संख्यांची रचना बदलून कसा जादुई चौरस बनवायचा ते! 1, 5, 9 आणि 3, 5, 7 या कर्णावरील संख्या मधली रांग आणि स्तंभ यात घ्यायच्या आणि 2, 5, 6 आणि 4, 5, 6 यांचे कर्ण बनवायचे. म्हणजे असा चौरस बनतो.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

तसाच दिनदर्शिकेतला

1	2	3
8	9	10
15	16	17

हा चौरस घ्यायचा आणि तशीच रचना करायची. पाहते जमतंय का.

16	1	10
3	9	15
8	17	2

हे छानपैकी जमलंय. हा संपूर्ण जादुई चौरस दिनदर्शिकेतून मिळाला आहे. कारण

$16 + 1 + 10 = 3 + 9 + 15 = 8 + 17 + 2 = 16 + 3 + 8 = 1 + 9 + 17 = 10 + 15 + 2 = 16 + 9 + 10 + 9 + 8 = 27$ अशी बेरीज येते.

बाबा : छान! छान!!

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

8. स्तंभीय बेरजेचा खेळ

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

सुशिला : 'हवी ती संख्या मनात धरा...' असले खेळ या दिनदर्शिकेत असतील ना?

बाबा : आहेत तर. आता हेच ऑगस्ट 2004 चं पान पाहा.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

आता पहिल्या स्तंभातील एक संख्या आणि तिसऱ्या स्तंभातील कुठलीही संख्या मनात धर. या दोहोंची बेरीज कर, पण मला उत्तर सांगू नकोस. एक अट आहे ती एवढीच, की ही बेरीज 32 पेक्षा कमी असायला हवी, कारण दिनदर्शिकेत 32 पेक्षा लहान संख्या आहेत.

सुशिला : ठीक. मी केली बेरीज आणि ती 32 पेक्षा लहान आहे.

बाबा : आता ही बेरीज जरी मला माहीत नाही, तरी ती बेरीज चौथ्या स्तंभात आहे एवढं मला माहीत आहे.

सुशिला : हे कसं हो तुम्ही सांगू शकलात बाबा? मी पहिल्या स्तंभातील 8 आणि तिसऱ्या स्तंभातील 17 या संख्या मनात धरल्या होत्या. त्यांची बेरीज 25 ही बरोबर चौथ्या स्तंभातच आहे. पण हे कसं काढलंत?

रवि : बाबा, मी एक दुसऱ्या आणि चौथ्या स्तंभातील अशा संख्या घेतल्या व त्यांची बेरीज केली. ती कुठल्या स्तंभात असेल?

बाबा : सहाव्या.

रवि : अगदी बरोबर आहे. मी दुसऱ्या स्तंभातील 16 आणि चौथ्या स्तंभातील 4 अशा संख्या निवडल्या होत्या; आणि त्यांची बेरीज 20 ही सहाव्या स्तंभातच आहे.

सुशिला : पण मग एकाच स्तंभातल्या दोन संख्या का नाही घेत?

बाबा : चौथ्या स्तंभातील दोन आकडे घेऊन कर बेरीज आणि पाहा ती पहिल्या स्तंभात येते की नाही?

सुशिला : बरोबर आहे. मी 11 आणि 18 घेतल्या आणि त्यांची बेरीज 29 पहिल्या स्तंभातच आहे. तसंच एकच संख्या दोनदा घेतली तरी जमतंय, कारण 4 अधिक 4 म्हणजे 8 ही बेरीजसुद्धा पहिल्याच स्तंभात आहे.

प्रसाद : मी पहिल्या स्तंभातील 22 ही संख्या घेतली आणि तिसऱ्या स्तंभातील 10 ही संख्या घेतली. बेरीज 32 आहे, पण ती संख्या दिनदर्शिकेत नाही.

बाबा : जर तू दिनदर्शिकेत 31 पुढेही संख्या लिहीत गेलास तर मग 32 कुठल्या स्तंभात आली असती?

प्रसाद : चौथ्या स्तंभात, म्हणजे मला आता नियम कळला. फक्त स्तंभ क्रमांकांची बेरीज केली की संख्यांची बेरीज ज्या स्तंभात असेल ते उत्तर येतं. आणि 31 पर्यंतच बेरीज हवी हे काही तसं खरं नाही. आपण जास्त संख्या क्रमाने लिहू शकतो.

बाबा : छान निष्कर्ष काढलास.

प्रसाद : मग मी चौथ्या स्तंभातील 11 आणि सहाव्या स्तंभातील 20 यांची बेरीज घेतली तर येणारं उत्तर 31 हे दहाव्या स्तंभात यायला हवं; पण दहा स्तंभच नाहीत.

रवि : आणि 31 तर तिसऱ्या स्तंभात आहे.

सुशिला : आणि 10 ही संख्यासुद्धा तिसऱ्याच स्तंभात आहे.

प्रसाद : पण 10 कोणत्या स्तंभात आहे हे न पाहता स्तंभ क्रमांक 3 हे उत्तर कसं येणार?

बाबा : एका स्तंभातील पहिली संख्या आणि तिच्या खाली येणाऱ्या इतर संख्या यांचं काही नातं असतं. ते कोणते?

रवि : स्तंभातल्या संख्या सातच्या वाढीने येतात, म्हणजे पहिल्या संख्येत सात मिळवले की त्या स्तंभातील पुढची संख्या, तिच्यात सात मिळवले की तिसरी संख्या, असंच हे नातं आहे.

सुशिला : **सातच्या स्तंभातले आकडे हे सातच्या पाढ्यातले आहेत.**

सुशिला : बरोबर. म्हणजे सातच्या पाढ्यातल्या संख्येत एक मिळवला की पहिल्या स्तंभातील आकडे येतात.

बाबा : **किंवा असं म्हणतात येईल, की कुठल्याही दिनदर्शिकेतल्या आकड्यास सातने भागल्यावर जी बाकी राहते ती त्या संख्येच्या स्तंभातील पहिली संख्या असते.**

सुशिला : पण मग 4 या संख्येला 7 ने कसं भागायचं?

रवि : मी सांगतो. 4 ला 7 ने भागलं की भाग 0 चा बसतो आणि बाकी 4 च शिल्लक राहते.

प्रसाद : बरोबर आहे.

रवि : म्हणजे या स्तंभ बेरजेच्या खेळात 1 ते 7 या संख्या विशेष महत्त्वाच्या आहेत.

सुशिला : 7 ला 7 ने भागल्यावर बाकी 0 असते.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

बाबा : आता 0 पासून सुरुवात करून सात स्तंभात संख्या लिहा आणि पाहा काय होतं ते.

सुशिला :

0	1	2	3	4	5	6	
7	8	9	10	11	12	13	
14	15	16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	26	27	वगैरे.

आता आपल्या मूळ दिनदर्शिकेतले स्तंभ पुढे पुढे गेले आणि शेवटचा स्तंभ आता पहिला झाला.

बाबा : म्हणून आपण या नव्या सारिणीतल्या पहिल्या स्तंभास 'बाकी 0' स्तंभ असं म्हणू. पुढे क्रमाने येणारे 'बाकी 1 स्तंभ', 'बाकी 2 स्तंभ' असे स्तंभ आहेत. यांना आपण 'बाकी 1 वर्ग गट', 'बाकी 2 वर्ग गट' इत्यादी इत्यादी असंही म्हणायला हरकत नाही. कारण हे बाकी वर्ग गट (residue classes) फक्त स्तंभातच असतील असं काही नाही. जर आपण सातऐवजी सहाच स्तंभ ठेवले असते तर काय झालं असतं?

सुशिला : मला लिहून बघू दे.

0	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	
12	13	14	15	16	17	
18	19	20	21	22	23	वगैरे.

रवि : इथेसुद्धा बाकी 0, बाकी 1, बाकी 2 इत्यादी वर्गातील संख्या आहेत.

बाबा : पण इथे आपण कुठल्या संख्येने भागतो?

सुशिला : 6 ने.

बाबा : आपण जर 8 ने भागायचं ठरवलं असतं तर एकूण बाकी 0, बाकी 1, असे किती वर्ग किंवा गट निर्माण झाले असते?

रवि : आठ. बाकी 0 पासून सातपर्यंत आपल्याला एकूण आठ वर्ग मिळाले असते.

बाबा : **सारखीच बाकी राहील अशा संख्यांचं एकमेकांशी जे नातं असतं त्याला गाउसने 'एकरूपता नातं' (congruence relation) असं नाव दिलं आहे.** अर्थात, हे नातं ज्या संख्येने भाग द्यायचा तिच्यावर अवलंबून असतं. म्हणजे 6 ने भागताना 1 आणि 7 या संख्यांचं एकरूपता नातं आहे; पण 7 किंवा 8 ने भागताना तसं त्यांचं नातं नाही. गाऊसचा हा नातेसंबंध आपण $9 \equiv 23$ (सापेक्ष 7) असा चिन्हांकन करतो आणि 7 सापेक्ष, 9 आणि 23 यांचा एकरूपता नातेसंबंध आहे, असं शब्दात म्हणतो.

प्रसाद : म्हणजे थोडक्यात, 9 आणि 23 यांना 7 ने भागल्यास बाकी सारखीच राहते असा अर्थ होतो ना?

रवि : किंवा मला वाटतं, की 23 आणि 9 यांची वजाबाकी 14 आहे आणि ती संख्या 7 या पटीत आहे. म्हणून ज्या संख्या 7 सापेक्ष एकरूपता नात्यात आहेत त्यांची वजाबाकी 7 च्या पटीत असते असं म्हणावं.

बाबा : असं तर म्हणायला काहीच हरकत नाही. आता असा विचार करा, जर $a = b$ असेल तर $a + c = b + c$ हे बरोबर आहे ना? तसंच जर $c = d$ हेसुद्धा समीकरण दिलं तर $a + c = b + d$ असं लिहिता येतंच ना? असंच आपणास एकरूपता नात्याच्या बाबतीत करता येणार नाही का?

प्रसाद : आलं लक्षात. आता $9 \equiv 23$ (सापेक्ष 7) हे दुसऱ्या स्तंभातल्या संख्यांचं नातं आहे. तेव्हा $9 + 2 \equiv 23 + 2$ (सापेक्ष 7) लिहिता येईल. तसंच $10 \equiv 17$ (सापेक्ष 7) हे तिसऱ्या स्तंभातलं नातं आणि $9 + 10 \equiv 23 + 17$ (सापेक्ष 7) हे पाचव्या स्तंभातलं नातं होय. स्तंभीय बेरजेच्या खेळाचा हा असा अर्थ लागला.

रवि : स्तंभीय वजाबाकीचासुद्धा खेळ बनवता येईल का?

बाबा : येईल तर. आता $5 - 3$ याचा तू काय अर्थ लावशील?

रवि : पाचातून तीन वजा करायचे किंवा पाचात वजा 3 मिळवायचे.

प्रसाद : होय. संख्या वजा करणं म्हणजे संख्येची विरुद्ध संख्या मिळवणं असंच असतं.

बाबा : याचा अर्थ असा झाला, की बेरजेचा विचार केला की वजाबाकीचा स्वतंत्र विचार करण्याची गरज नाही.

सुशिला : मग बाबा, मी म्हणजे, स्तंभीय गुणाकाराचासुद्धा खेळ असायला हवा. म्हणजे दुसऱ्या स्तंभातील 9 आणि तिसऱ्या स्तंभातील 3 याचा गुणाकार सहाव्या स्तंभात असायला हवा; आणि नऊ त्रिक सत्तावीस, बरोबर सहाव्या स्तंभातच आहेत.

बाबा : बरोबर आहे. कारण विचार कर, $a = b$ जर असेल तर $ac = bc$ असणारच ना? शिवाय जर $c = d$ असेल तर मग $ac = bd$ हेही बरोबर असणारच ना? असंच एकरूपता नात्याच्या बाबतीतसुद्धा म्हणता येईल.

प्रसाद : माझी खात्री आहे, पण आपण तपास करून ठरवू.
$8 \equiv 15$ (सापेक्ष 7) हे पहिल्या स्तंभात.
$8 \times 2 \equiv 15 \times 2$ (सापेक्ष 7) हे तर बरोबरच आहे.
आता $2 \equiv 9$ (सापेक्ष 7) हे दुसऱ्या स्तंभात आहे.
मग $8 \times 2 \equiv 15 \times 9$ (सापेक्ष 7) किंवा $16 \equiv 135$ (सापेक्ष 7) हे बरोबर आहे ना?

रवि : 135 वजा 16 म्हणजे 119 आणि ही संख्या 7 च्या पटीत आहे, कारण $7 \times 17 = 119$. बरोबर आहे.

प्रसाद : आपल्याला $a^2 \equiv b^2$, $a^3 \equiv b^3$ असंही म्हणता येईल. बरोबर?

बाबा : अगदी शंभर टक्के बरोबर.

प्रसाद : पण मग भागाकाराचं काय? म्हणजे अपूर्णांकाने गुणणं वगैरे? जसं $a = b$ आणि $c = d$ असेल तर आपण $a/c = b/d$ असं करतो ना?

बाबा : एकरूपता नात्यांमध्ये भागाकार करताना विशेष खबरदारी घ्यावी लागेल. नाहीतरी साध्या भागाकारातसुद्धा शून्याने भाग घालवता येत नाहीच. त्यामुळे भागाकाराचा विषय आपण पुन्हा कधीतरी पुढे घेऊ.

9. दिनांक आणि वार

सुशिला : बाबा, आपण बहुतेक वेळा अमुक तारखेला दिवस कोणता हे पाहण्यासाठीच दिनदर्शिका वापरतो. आपण जे आता बाकी 0, बाकी 1 वगैरे शिकलो, त्याचा या कामात उपयोग करून तारीख आणि वार काढू शकू काय?

बाबा : फारच चांगला प्रश्न विचारलास सुशिला. आपणास एखाद्या तारखेचा दिवस माहीत असेल तर त्या तारखेच्या आधीच्या अगर नंतरच्या तारखेचा दिवस, बाकी वर्ग या संकल्पनेच्या मदतीने निश्चितच काढू शकतो. आधी ते ऑगस्ट 2004 च्या दिनदर्शिकेचे पान समोर राहूद्या.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

- आता सांग, तीन तारीख कधी येते?

सुशिला : मंगळवारी.

बाबा : तीनात सात मिळव. किती आले?

सुशिला : दहा.

बाबा : दहा तारीख कधी येते?

सुशिला : मंगळवारी.

बाबा : मग आता सांग, 'सात मिळवणं' याचा दिवसावर काय परिणाम होतो?

सुशिला : दिवस तोच राहतो, बदलत नाही.

बाबा : ठीक. आता सांग, 'सहा मिळवणं' याचा काय अर्थ होतो?

रवि : म्हणजे आदला दिवस.

बाबा : आणि 'आठ मिळवणं' म्हणजे याचा अर्थ काय होतो?

रवि : म्हणजे पुढचा दिवस असा होईल.

बाबा : आणि 'एक मिळवणं' म्हणजे काय?

रवि : त्याचासुद्धा अर्थ पुढचा दिवस असाच होईल.

प्रसाद : आठ मिळवणं आणि एक मिळवणं हे सारखंच आहे, म्हणजे एक आणि आठ यांचा 7 सापेक्ष 'बाकी 1' हा नातेसंबंध महत्त्वाचा आहे असं दिसतं.

रवि : हा नमुना आता माझ्याही लक्षात आला. 1, 9, 17, 25 या संख्या मागीचीत 8 मिळवून येतात, म्हणजेच 1 तारखेस रविवार तर 9 तारखेस सोमवार, 17 तारखेस मंगळवार, 25 तारखेस बुधवार, असे दिवस येणार. ते या दिनदर्शिकेत दिसतंच आहे.

सुशिला : मलाही हे समजलं. 6, 12, 18, 24 या संख्या सहाने वाढताहेत. सहा मिळवणं म्हणजे मागचा दिवस, हे आपण पाहिलं. आता 6 तारखेस शुक्रवार तेव्हा 12 तारखेस गुरुवार, 8 तारखेस बुधवार आणि 23 तारखेस मंगळवार, हे जमलं.

प्रसाद : होय सुशिला, तू घेतलेल्या 6, 12, 18, 24 चा 'बाकी' वर्ग म्हणजे गट 6, 5, 4, 3 असा आहे. म्हणून त्या तारखांना येणारे दिवस उलट्या क्रमाने आले आहेत.

सुशिला : हे फारच मजेदार आहे.

बाबा : नऊ तारखेस कोणता दिवस येतो?

सुशिला : सोमवार.

बाबा : मग आणखी 11 दिवसांनंतर कोणता वार येणार?

सुशिला : 9 + 11= 20; आणि 20 तारखेला शुक्रवार आहे.

रवि : पण दिनदर्शिकेत न पाहता आपण हे लक्षात घ्यायला हवं, की 9 चा बाकी वर्ग म्हणजे गट 2 आहे आणि 11 चा बाकी वर्ग म्हणजे 4 आहे. तेव्हा 9 + 11 चा वर्ग म्हणजे गट 2 + 4 = 6 येणार. आणि 6 तारखेस तर शुक्रवार आहे. म्हणून 20 तारखेसही शुक्रवारच येणार.

प्रसाद : 15 तारखेस रविवार आहे. मग 23 दिवसांनी कोणता वार येणार?

सुशिला : 23 चा बाकी वर्ग गट 2 आहे. म्हणजे रविवारनंतर दोन दिवस किंवा मंगळवार आला.

रवि : मी पाहतो. 15 + 23 = 38. आता 38 = 31 + 7 म्हणजे ही तारीख 7 सप्टेंबर झाली; आणि सप्टेंबर महिन्याच्या 7 तारखेला बरोबर मंगळवारच आहे.

प्रसाद : पण मग याचा अर्थ असा झाला, की एका ऑगस्ट 2004 च्या दिनदर्शिकेतल्या पानावरून बाकी वर्गाचं गणित करून वर्षातल्या इतर कोणत्याही तारखेचा दिवस मिळू शकेल. बरोबर आहे ना बाबा?

बाबा : अरे, एका वर्षाचेच काय घेऊन बसलास! इतर कोणत्याही वर्षातील कोणत्याही महिन्यातल्या कोणत्याही तारखेचा दिवस काढता येईल. फक्त ते ग्रेगोरियन दिनदर्शिकेतलं वर्ष हवं. तुम्हाला ज्युलियन आणि ग्रेगोरियन दिनदर्शिका लक्षात आहेत काय?

रवि : होय. तुम्ही आम्हांला ते एकदा सांगितलं होतं. पण बाबा, आपण या ऑगस्ट 2004 च्याच महिन्यापासून सुरुवात करावी असं काही नसणार ना? दुसऱ्या कुठल्याही महिन्यापासून सुरुवात करता आली असती ना?

बाबा : होय. फक्त पुढे तसंच मागे जायची तयारी पाहिजे. नाहीतर 'बाकी वर्ग'च्या संख्यांची बेरीज तशी वजाबाकी करता येते हे आधी पाहिलंच आहे. तेव्हा रवि म्हणतो तसं करण्यात काहीच अडचण नाही. आपण उदाहरणच घेऊन पाहू.

सुशिला : 17 सप्टेंबरला शुक्रवार आहे. मग 11 दिवसांपूर्वी कोणता वार असेल? 17 – 11 = 6 आणि 6 तारखेस सोमवार आहे. पण आपण हे बाकी वर्ग वापरून करायचं आहे. 17 चा बाकी वर्ग 3 आहे, म्हणजे 17 ला 7 ने भागल्यावर 3 बाकी राहते हे लक्षात घ्या आणि 11 चा बाकी वर्ग 4 आहे. आता आपणास 3 – 4 ही वजाबाकी करायची आहे; पण 3 आणि 10 चा वर्ग एकच आहे. म्हणून 3 – 4 ऐवजी 10 – 4 = 6 असंही करता येईल; आणि 6 चा वर्ग दिवस सोमवार आहे. तेव्हा हे जमलं आहे यात शंका नाही.

रवि : आता मी दिनदर्शिकेतलं वेगळंच पान पाहून सांगतो, की 6 जूनला रविवार आहे, तर त्यापूर्वी 40 दिवस अगोदर कोणता वार असेल?

सुशिला : 40 चा बाकी वर्ग 5 आहे. म्हणजे 40 ला 7 ने भागल्यावर बाकी 5 राहते. आणि 6 – 5 = 1.

प्रसाद : जूनच्या 1 तारखेस मंगळवार आहे, म्हणजे 6 जूनला 40 दिवस आधीसुद्धा मंगळवारच असणार. अर्थात, महिना वेगळा असणार. जूनच्या आधी मे महिना 31 दिवसांचा आहे, म्हणजे 6 जूनच्या आधी 6 दिवस जूनचे आणि 31 दिवस मेचे, असे 37 दिवस गेल्यावर एप्रिलचे 3 दिवस कमी करायचे, म्हणजे 27 एप्रिल ही तारीख आली; आणि त्या दिवशी नेमका मंगळवारच आहे.

बाबा : ठीक. आता सांगा, 2005 मध्ये एक जानेवारीला कोणता वार असणार?

रवि : 1.1.2004 ला गुरुवार आहे. हे लीप वर्ष असल्यामुळे 1.1.2005 त्यानंतर 366 दिवसांनी येणार. 366 चा बाकी वर्ग त्या संख्येस 7 ने भागल्यावर 2 येतो. म्हणजे 1.1.2004 च्या वारात दोन मिळवावे लागतील आणि 1.1.2005 ला शनिवार येईल.

सुशिला : थांब, मला बघू दे. 2004 च्या 31 डिसेंबरला या दिनदर्शिकेप्रमाणे शुक्रवार आहे. तेव्हा 1.1.2005 ला शनिवार असणार हे बरोबरच आहे.

प्रसाद : पण 1.1.2003 ला कोणता दिवस हे कसं काढणार?

रवि : आपण आताच पाहिलं, की 1.1.2004 ला गुरुवार आहे. त्याच्या आधी 365 दिवस जायला हवं, कारण 2003 हे काही लीप वर्ष नाही.

सुशिला : 365 चा बाकी वर्ग एक आहे आणि गुरुवारच्या आधी एक दिवस म्हणजे 1.1.2003 ला बुधवार असायला हवा.

रवि : ते गेल्या वर्षीच्या दिनदर्शिकेत पाहायला मिळेल. 2003 च्या 1 जानेवारीस बरोबर बुधवारच आहे.

प्रसाद : आपण बाकी वर्गांची संकल्पना वापरून दिनदर्शिकेचं काम खूपच सोपं करू शकू, नाही का बाबा?

बाबा : होय, आपण एका पोस्टकार्डच्या आकारात सबंध दिनदर्शिका बाळगू शकतो.

रवि : आम्हांला बनवायला आवडेल. काही मदत करा ना आम्हांला अशी दिनदर्शिका बनवायला.

बाबा : या दिनदर्शिकेत जास्तीत जास्त तारखा असायला हव्यात.

सुशिला : म्हणजे 1 ते 31 पर्यंत का?

बाबा : हो, पण सर्व महिन्यात तेवढे दिवस नसतात. तुम्हाला प्रत्येक महिन्याचे किती दिवस हे माहीत आहे का?

रवि : हो तर. जानेवारी, मार्च, मे, जुलै, ऑगस्ट, ऑक्टोबर आणि डिसेंबरचे 31, फेब्रुवारीचे साध्या वर्षी 28 आणि लीप वर्षात 29 आणि इतर एप्रिल, जून, सप्टेंबर आणि नोव्हेंबर महिन्यांचे 30.

बाबा : म्हणून आपण प्रत्येक महिन्याच्या पहिल्या तारखेचा वार ठरवायला हवा.

रवि : ठीक आहे. मी 'बाकी वर्ग'च्या संकल्पनेस धरून पहिल्या तारखांचे वार ठरवतो.

सुशिला : मग तू फक्त जानेवारी 2004 चा कागद आपल्याकडे ठेव आणि बाकी मी घेते. तुझी उत्तरं मी तपासीन.

रवि : 1 जानेवारीला गुरुवार आहे. 1 फेब्रुवारी 31 दिवसांनंतर येणार. त्याचा बाकी वर्ग 3 आहे, कारण 31 ला 7 ने भागल्यास बाकी 3 राहते. गुरुवारनंतर 3 दिवस म्हणजे 1 फेब्रुवारीला रविवार येणार. हे लीप वर्ष आहे, म्हणजे फेब्रुवारीचे 29 दिवस. 29 चा बाकी वर्ग 1 म्हणजे 1 मार्चला सोमवार.

सुशिला : अगदी बरोबर.

रवि : 1 एप्रिल पुढे 31 दिवसांनंतर येणार आणि 31 चा बाकी वर्ग 3 म्हणजे सोमवारनंतर तीन दिवसांनी गुरुवारी 1 एप्रिल असणार. आता मी सरळच बाकीचे दिवस शोधून काढतो. 1 मे ला शनिवार, 1 जूनला मंगळवार, 1 जुलैला गुरुवार, 1 ऑगस्टला रविवार, 1 सप्टेंबरला बुधवार, 1 ऑक्टोबरला शुक्रवार, 1 नोव्हेंबरला सोमवार आणि 1 डिसेंबरला बुधवार.

सुशिला : अगदी सर्वच बरोबर.

प्रसाद : आता जानेवारी, एप्रिल आणि जुलै हे महिने गुरुवारी सुरू होतात. ऑक्टोबर शुक्रवारी, मे शनिवारी, फेब्रुवारी आणि ऑगस्ट रविवारी, मार्च आणि नोव्हेंबर सोमवारी, जून मंगळवारी तर सप्टेंबर आणि डिसेंबर बुधवारी सुरू होतात. महिन्याच्या पहिला दिवस कधी येणार हे महिना क्रमांक वापरून आपणास असं लिहिता येईल : 1, 4, 7 गुरुवार, 10 शुक्रवार, 5 शनिवार, 2, 8 रविवार, 3, 11 सोमवार, 6 मंगळवार, 9, 12 बुधवार. आता गंमत म्हणजे, जशी 2004 ची दिनदर्शिका आपण संपूर्ण जानेवारी महिन्याच्या संदर्भात बनवली, तशीच पण संक्षिप्त स्वरूपात इतर महिन्यांची दिनदर्शिका बनवता येतेच. ती अशा प्रकारे बनवता येईल –

	रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
संपूर्ण जानेवारी 2004 ची दिनदर्शिका					1	2	3
	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30	31
इतर महिने क्र.							
1, 4, 7	4	5	6	7	1	2	3
10	5	6	7	1	2	3	4
5	6	7	1	2	3	4	5
2, 8	7	1	2	3	4	5	6
3, 11	1	2	3	4	5	6	7
6	2	3	4	5	6	7	1
9, 12	3	4	5	6	7	1	2

सुशिला : आता मला एक 21.9.2004 अशी तारीख निवडायची आहे. तिचा वार या संक्षिप्त दिनदर्शिकेत कसा पाहायचा?

प्रसाद : नवव्या महिन्याच्या रांगेत आणि 21 जानेवारीच्या तारखेखाली 6 हा दिवस येतो; आणि 6 तारखेला दिनदर्शिकेत मंगळवार आहे. म्हणजे या दिवशी मंगळवार असणार आहे.

रवि : मलाही करून पाहायचंय. मला एक तारीख सांग. मी वार ओळखतो.

सुशिला : 24.11.2004 या तारखेचा दिवस ओळख.

रवि : अकराव्या महिन्याच्या रांगेत आणि 24 तारखेच्या स्तंभात 7 वा दिवस आहे; आणि 7 तारखेस बुधवार आहे. म्हणजे 24.11.2004 रोजी बुधवार असणार.

सुशिला : बरोबर.

प्रसाद : पण हे आपल्याला आणखी सोपं करायला नाही का जमणार? मला एक कल्पना सुचतेय. जानेवारीखेरीज इतर महिन्यांसाठी बाकी वर्गाच्या संख्येत काय आकडा मिळवायचा हेच लिहून ठेवावं, म्हणजे आणखी सोपं होईल. आता जानेवारी, एप्रिल आणि जुलैसाठी बाकी वर्ग 0 किंवा 7 म्हणता येईल. ऑक्टोबरसाठी बाकी वर्ग 1 आहे, मेसाठी 2 आहे, फेब्रुवारी आणि ऑगस्टसाठी 3 आहे, मार्च आणि नोव्हेंबरसाठी 4, जूनसाठी 5 आणि सप्टेंबर व डिसेंबरसाठी 6 आहे.

रवि : बरं मग?

प्रसाद : आपण आता पूर्वीसारखीच दिनदर्शिका बनवू; पण ती अधिक संक्षिप्त असणार आहे. ही पाहा -

जानेवारी 2004						
रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31
3	6	9	1	10	5	2
11		12	4			8
			7			

रवि : आण तो कागद इकडे आणि मला एक तारीख दे. मी वार सांगेन.

प्रसाद : ठीक. 12.3.2004 या दिवशी कोणता वार होता ते सांगा.

रवि : 12 चा बाकी वर्ग 5 आहे आणि 3 या महिन्याच्या स्तंभात पहिला आकडा (किंवा बाकी वर्ग) 4 आहे. आता 5 + 4 = 9 चा बाकी वर्ग 2 आहे आणि 2 तारखेस शुक्रवार आहे. म्हणजे 12.3.2004 रोजी शुक्रवार आहे.

प्रसाद : जमलं हे तुला.

सुशिला : हो, पण मला जमायला हवं ना. मलाही एक तारीख सांग.

रवि : आता 19.8.2004 या दिवसाचा वार काढ पाहू.

सुशिला : 19 चा बाकी वर्ग 5 आहे आणि 8 म्हणजे ऑगस्ट महिन्याच्या स्तंभात 3 हा आकडा आहे. 5 आणि 3 यांची बेरीज 8 व बाकी वर्ग 1 आहे आणि 1 तारखेस गुरुवार म्हणून 19.8.2004 रोजी गुरुवार, असंच का?

प्रसाद : बरोबर, पण तू हे करत असताना मला आणखी एक कल्पना सुचली, ज्यामुळे आपली दिनदर्शिका आणखी संक्षिप्त होणार आहे. कारण जानेवारीत तरी सगळ्या तारखा दाखवण्याची काय गरज? आपल्याला तर फक्त कुठल्याही तारखेचा बाकी वर्ग हवा असणार आहे; आणि तो तर फक्त 1 ते 7 या आकड्यांपैकीच किंवा आणखीही सोपं म्हणजे, खरं तर 0 ते 6 या आकड्यांपैकीच असणार आहे.

रवि : आला लक्षात तुझ्या बोलण्याचा मुद्दा. म्हणजे ही दिनदर्शिका अगदी एका चिठोऱ्यावरसुद्धा अशी जमेल.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
4	5	6	0	1	2	3
3	6	9	1	10	5	2
11		12	4			8
			7			

सुशिला : हे फारच संक्षिप्त, पण छान वाटतंय. सबंध वर्षाची दिनदर्शिका एवढ्याशा चिठोऱ्यावर बसवता येते. दर वर्षी बाबा आपणास अशी एक दिनदर्शिका छापून देऊ शकतील. ती कशी वापरायची हे सोबत लिहिलं तर आपण आपल्या मित्र-मैत्रिणीस भेट म्हणून वर्षाच्या सुरुवातीस देऊ शकू.

बाबा : हे तर तुम्ही करू शकालच; पण याहूनही जास्त करता येईल.

दिनदर्शिकेतील मौज

एप्रिल 2007

शेजारी दाखवल्याप्रमाणे कोणत्याही चार चौरसातील चारही संख्यांची बेरीज दिल्यास पहिली संख्या तुम्ही सहज शोधू शकता.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

उदाहरणार्थ, इथे बेरीज 56 येते आहे. अशा वेळेस बेरजेतून 16 वजा करून आलेल्या वजाबाकीला 4 ने भागा. (इथे 56 - 16 = 40, 40 ÷ 4 = 10) हे असं का घडतं ते तुम्ही शोधून काढा.

बेरीज 96 असणाऱ्या चार चौरसांतील पहिली संख्या सांगा.

10. एका कपट्यावर दोनशे वर्षांची दिनदर्शिका

आतापर्यंतचा या पुस्तकाचा भाग आपण संवादाच्या स्वरूपात पाहिला. आता उरलेला भाग मी शब्दांत लिहून दाखवतो. ज्यांना एक वर्षाची दिनदर्शिका कागदाच्या कपट्यावर आणल्याचं समाधान पुरेसं आहे, त्यांनी इथेच थांबायला हरकत नाही; पण मला आणखी पुढे जाऊन भलीमोठी दिनदर्शिका जवळ जवळ तेवढ्याच कागदाच्या कपट्यावर आणायला जास्त मजा वाटेल; आणि त्या कामापासून सध्या आपण काही फार दूर नाही.

आतापर्यंत आपण हे पाहिलं, की सबंध वर्षाची दिनदर्शिका एका कागदाच्या कपट्यावर कशी संक्षिप्तपणे बसवता येईल. तिचाच तर आपण तपशीलवार विचार केला तर आपणासच एकच नव्हे, तर अनेक वर्षांची भलीमोठी दर्शिका बनवता येईल. ती दोनशे वर्षे किंवा अधिक काळसुद्धा उपयोगी पडू शकते. पुन्हा एकदा आपण संदर्भासाठी 2004 या वर्षाची दिनदर्शिका पाहू.

इसवी सन 2004 ची दिनदर्शिका

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
4	5	6	0	1	2	3
3	6	9	1	10	5	2
11		12	4			8
			7			

आपल्यासमोर 2004 च्या जानेवारी महिन्याची बाकी वर्ग स्वरूपातली संक्षिप्त सारिणी वरच्या विभागात आहे. उदाहरणार्थ, या महिन्यात गुरुवारी 1 तारीख आहे. 12 जानेवारी हा दिवस हवा असेल तर आपण 7 या संख्येसापेक्ष 12 चा बाकी वर्ग 5 काढतो आणि 5 तारखेस जो वार आहे, तो म्हणजे सोमवार 12 जानेवारीस असणार आहे.

जानेवारीनंतर येणाऱ्या फेब्रुवारी महिन्याची 1 तारीख रविवार असणार आहे, कारण 1 जानेवारीनंतर 31 वा दिवस म्हणजे गुरुवातनंतर 3 दिवसांनी रविवार आहे. हे आपण खालील पद्धतीने करतो. 1.2.2004 या तारखेतील 1 आणि दुसऱ्या महिन्याच्या स्तंभातील बाकी वर्ग निर्देशक 3 यांची बेरीज करून बाकी वर्ग 4 मिळवतो आणि 4 चा वार मुख्य दिनक्रमात (म्हणजे आपल्या दिनदर्शिकेच्या पहिल्या भागात) रविवार आहे म्हणून 1.2.2004 रोजी रविवार असणार. आणखी एक जानेवारीनंतरचं उदाहरण पाहायचं तर 15.9.2004 या तारखेचा वार आपण शोधू. 15 चा बाकी वर्ग 1. 9 या महिन्याच्या स्तंभात आपणास 6 हा बाकी वर्ग निर्देशक

आकडा मिळतो. आपली दिनदर्शिका 2004 चीच असल्याने फक्त या दोन बाकी वर्गांची बेरीज करायची. ती 7 येते आणि 7 चा बाकी वर्ग आपण 0 असा लिहिला आहे. 0 ही संख्या बुधवारच्या स्तंभात आहे याचा अर्थ 15.9.2004 या तारखेचा वार हा बुधवार ठरला. अशा तऱ्हेने 2004 या सबंध वर्षाची दिनदर्शिका आपणास तारीख आणि महिना यावरून मिळते.

आता पुढे जाऊन 2005 चा विचार करू. 2004 या वर्षात 366 दिवस आहेत, कारण हे लीप वर्ष आहे. 366 चा बाकी वर्ग 2 आहे. याचा अर्थ, 1 जानेवारी 2005 चा वार वरील सारिणीच्या मुख्य भागातील 1 तारखेनंतर दोन दिवसांनी म्हणजे शनिवारी येणार. आता 2005 मधील इतर दिवस काढण्यासाठी 2004 प्रमाणेच आकडेमोड करून त्यात 2005 या वर्षासाठी 366 चा बाकी वर्ग म्हणजे 2 मिळवावेत असे वाटणे साहजिक आहे. पण त्यात एक अडचण आहे. ती म्हणजे, 2005 हे लीप वर्ष नसल्यामुळे 28 फेब्रुवारीपर्यंतचे वार या पद्धतीने काढता येतील; पण 1 मार्च आणि नंतरचे दिवस मात्र या पद्धतीने मिळणार नाहीत. 1 मार्चपासून 31 डिसेंबरपर्यंतचे सर्व दिवस एकेक दिवस आधीच येतील. किंवा दोन ऐवजी 2004 च्या बाकी वर्गात एकच मिळवावा लागेल. यासाठी आपण आधी 2005 ची दिनदर्शिका बनवूया.

इसवी सन 2005 ची दिनदर्शिका

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
2	3	4	5	6	0	1
8	2	6	9	4	1	5
	3		12	7	10	
	11					

या दिनदर्शिकेत फेब्रुवारी आणि मार्चच्या तारखा सारख्या दिवशी येणार, कारण लीप वर्ष नसल्याने या दोन्ही महिन्यांचा बाकी वर्ग सारखाच म्हणजे या 2005 च्या दिनदर्शिकेत 3 आहे. 2004 आणि 2005 या दोन वर्षांचा अभ्यास केल्यास असं लक्षात येईल, की मार्चपासून पुढच्या सर्व महिन्यांचा, लीप वर्षाच्या दिनदर्शिकेपेक्षा बाकी वर्ग एकने कमी आहे. हे बरोबर आहे, कारण 2005 या वर्षात 365 दिवस आहेत, लीप वर्षाप्रमाणे 366 नाहीत.

आता एवढं लक्षात घेतल्यावर 2006 ची दिनदर्शिका बनवण्यात फारशी अडचण पडत नाही. 365 चा बाकी वर्ग 1 असल्यामुळे 1 जानेवारी 2006 हा दिवस 1 जानेवारी 2005 च्या तुलनेत एक दिवस उशिरा म्हणजे रविवारी येणार. आणि या सारिणीत महिन्यांचे क्रमांक भरताना हे लक्षात असू द्या, की 1 च्या स्तंभात मे महिन्याचा बाकी वर्ग 5 येणार, कारण 1 जानेवारीपासून 1 मेपर्यंत 31+28+31+30 = 120 दिवस लागतात आणि 120 चा बाकी वर्ग 1 आहे. तसंच 2 च्या स्तंभात 8, 3 च्या स्तंभात 2, 3 आणि 11 इत्यादी सारिणीच्या खालच्या भागात येणार. महिन्यांचे बाकी वर्ग कुठल्याही साध्या, म्हणजे लीप नसलेल्या, वर्षाला असेच जोडावे लागतील. म्हणजे 1 तारखेखाली मे महिन्याचा (5) बाकी वर्ग, 2 तारखेखाली ऑगस्टचा (8) बाकी वर्ग, 3 तारखेखाली फेब्रुवारी, मार्च आणि नोव्हेंबरचा बाकी वर्ग (2, 3, 11) इ. इ. आपणास मूळ 2004 चीच दिनदर्शिका समोर ठेवूनसुद्धा हे मांडता येईल. आधी मूळ 2004 ची दिनदर्शिका वापरून 2004 मधील कोणत्याही तारखेचा वार कसा पाहायचा हे आपण शिकलोच आहोत. 29 फेब्रुवारी हा एक विशेष दिवस (जो 2005 मध्ये

अस्तित्वात नाही) सोडून 2005 च्या कुठल्याही तारखेचा वार काढताना आपण 2004 चा बाकी वर्ग अधिक 2 चा बाकी वर्ग घ्यावा आणि महिन्यांचा बाकी वर्ग साध्या वर्षाचा वापरावा, जो खाली तिसऱ्या भागात दिला आहे. म्हणजे आपली दिनदर्शिका आता अशी दिसेल.

2004 आणि 2005 ची संयुक्त दिनदर्शिका

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
4	5	6	0	1	2	3
3	6	9	1	10	5	2
11		12	4			8
			7			
6	9	4	1	5	8	2
	12	7	10			3
						11

या सारिणीतील पहिल्या दोन भागांचा उपयोग करून आपण 2004 या वर्षाचा कोणताही दिवस काढायला शिकलो आहोतच. आता 2005 साठी पहिल्या मुख्य भागासह सर्वात शेवटचा भाग महिन्याचा बाकी म्हणून वापरावा, कारण हे लीप वर्ष नाही. तसंच या सारिणीची 2005 साठी बनवलेल्या वरील सारिणीशी तुलना करता आपणास 2005 साठी या संयुक्त दिनदर्शिकेत बाकी वर्ग 2 मिळवावा लागेल. उदाहरणार्थ, 1.8.2005 या तारखेसाठी दिवसाचा बाकी वर्ग 1, अधिक 8 या महिन्याचा बाकी वर्ग 2 आणि 2005 या वर्षाचा बाकी वर्ग 2 असा 1.8.2005 चा बाकी वर्ग 1 + 2 + 2 = 5 येतो आणि सारिणीच्या मुख्य भागानुसार 1.8.2005 रोजी सोमवार येतो.

हे आपणास संयुक्त दिनदर्शिका न वापरता फक्त 2005 ची वरील स्वतंत्र दिनदर्शिका वापरूनही करता येतं. त्या दिनदर्शिकेत 1 तारखेचा बाकी वर्ग 1 आणि ऑगस्टचा बाकी वर्ग 2 यांची बेरीज 3 येते आणि 3 चा वार सोमवारच येतो. आता हीच संयुक्त दिनदर्शिका 2006 साठी वापरायची म्हटलं, तर तिच्यात 2006 चा बाकी वर्ग 3 घ्यावा लागेल, कारण 2005 साठी 366 दिवसांनंतरचा बाकी वर्ग 2 आणि पुढे 365 दिवसांनी 2006 मध्ये येणारी बाकी वर्ग 1 यांची बेरीज घ्यावी लागेल. याऐवजी 2006 ची स्वतंत्र दिनदर्शिका बनवायची असेल तर 2004 च्या मुख्य भागात 3 दिवस पुढे जाऊन ही दिनदर्शिका अशी बनवता येईल.

इसवी सन 2006 ची दिनदर्शिका

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
1	2	3	4	5	6	0
5	8	2	6	9	4	1
		3		12	7	10
		11				

या दिनदर्शिकेच्या मुख्य भागाची वरील संयुक्त दिनदर्शिकेशी तुलना केल्यास हे लक्षात येईल, की येथे 1 जानेवारी रविवारी, म्हणजे 2004 च्या 1 जानेवारीपेक्षा 3 दिवस उशिरा येते.

या सर्व विवेचनाचा अर्थ एवढाच झाला, की आपण प्रत्येक वर्षासाठी वेगवेगळा न बनवता एकच मुख्य भाग एका प्रमाण वर्षाचा (जो आपल्या उदाहरणात 2004 चा आहे) ठेवावा. फक्त महिन्यांच्या बाकी वर्गासाठी मात्र लीप वर्ष आणि साधे वर्ष असे दोन भाग जोडावेत. आणि चालू वर्षापासून हव्या त्या वर्षापर्यंतचा बाकी वर्ग यासाठी स्वतंत्र कोश बनवावा आणि आवश्यक तसा तो वापरावा. 2004 हे प्रमाण वर्ष घेऊन आपण दिनदर्शिका बनवली तर 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 इत्यादी वर्षांसाठी मूळ दिनदर्शिकेत 2, 3, 4, 5, 7... असे बाकी वर्गांचे कोष्टक बनवावे. म्हणजे आपली संपूर्ण दिनदर्शिका बनवण्यापूर्वी आपण वर्ष 2004 ऐवजी कुठलं घेणं सोपं याचाही विचार करू. सध्या 2003, 2002, 2001 या वर्षांसाठी -1, -2, -3 म्हणजे 6, 5, 4 असे बाकी वर्ग घेऊन 2004 च्या आधी येणाऱ्या वर्षासाठी ही दिनदर्शिका वापरता येईल. अशी वजावट टाळायची असेल तर आपण शक्य तो असे प्रमाण वर्ष घ्यावे जेथून बेरजेनेच इतर वर्षांचे बाकी वर्ग काढता येतील.

कुठल्याही लीप वर्षानंतच्या वर्षाचा बाकी वर्ग दोनने आणि लीप नसलेल्या साध्या वर्षानंतर बाकी वर्ग एकने असे वाढतात. ही बाकी वर्गांची श्रेणी कशी वाढते आणि मुख्य म्हणजे तिचा आवर्तन काल किती आहे हे आपणास आधी काढावं लागेल. यासाठी आपण 1901 या विसाच्या शतकाच्या पहिल्या वर्षापासून सुरुवात करू. जुनी दिनदर्शिका वापरून किंवा थोडीशी आकडेमोड करून 1901 च्या 1 जानेवारीस मंगळवार होता हे आपण काढू शकतो. एवढ्या माहितीवर आपणास 1901 प्रमाण वर्षाच्या कोशाचा मुख्य भाग असा बनवता येईल.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
6	0	1	2	3	4	5

या जानेवारी 1901 च्या संक्षिप्त दिनदर्शिकेच्या लीप वर्ष आणि साधे वर्ष यांच्या महिन्यांचे वरील बाकी वर्ग जोडल्यावर आपली दिनदर्शिका अशी दिसेल.

जानेवारी 1901	रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
	6	0	1	2	3	4	5
लीप वर्षाचे महिने	9 12	1 4 7	10	5	2 8	3 11	6
सध्या वर्षाचे महिने	4 7	1 10	5	8	2 3 9	6	9 12

1901 हे साधे वर्ष असल्यामुळे आपणास जर 16.5.1901 या तारखेचा वार शोधायचा असेल तर 16 चा बाकी वर्ग 2 अधिक 5 व्या महिन्याचा बाकी वर्ग 1 यांची बेरीज करून मुख्य भागात 3 च्या बाकी वर्गाचा दिवस गुरुवार मिळतो. म्हणजे 16.5.1901 ही तारीख गुरुवारी होती.

आता याच सारिणीत इतर वर्षे पाहता यायला हवी आहेत. 1901 हे मूळ वर्ष असल्यामुळे त्या वर्षाचा बाकी वर्ग 0 असणार. यापुढील 1902, 1903 आणि 1904 साठी बाकी वर्ग अनुक्रमे 1, 2 आणि 3 हे असणार, कारण ही सर्व वर्षे मागील वर्षानंतर 365 दिवसांनी येतात आणि 365 चा बाकी वर्ग 1 आहे; पण 1905 चा बाकी वर्ग 5 असेल कारण 1904 च्या बाकी वर्गात 2 मिळवून 366 दिवसानतर येणाऱ्या 1905 चा बाकी वर्ग मिळणार. त्यानंतर पुन्हा पुढचे 1908 पर्यंतचे तीन बाकी वर्ग 6, 0 आणि 1 असतील. या पद्धतीने 1901 पासूनच्या पुढील वर्षाचे बाकी वर्ग पुढील तक्त्यात पहा.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0	1	2	3	5	6	0	1	3	4	5	6	1	2	3	4	6	0	1	2	4	5	6	0	2	3	4	5	0

1929 हे 1901 प्रमाणे लीप वर्षानंतरचे पहिले वर्ष असून त्याचा बाकी वर्गही 1901 प्रमाणेच 0 आहे. तेव्हा 1901 ते 1928 हे 28 वर्षांचे आवर्तन (period) संपल्यानंतर पुन्हा त्याच 28 बाकी वर्गांची पुनरावृत्ती होणार हे उघड आहे. या 28 वर्षांची सात उपावर्तने (sub-period) मानल्यास पहिले उपावर्तन 1901 ते 1904, दुसरे 1905 ते 1908, तिसरे 1909 ते 1912 अशा प्रकारे सातवे उपावर्तन 1925 ते 1928 असे राहील. या प्रत्येक उपावर्तनातील पहिला बाकी वर्ग अनुक्रमे 0, 5, 3, 1, 6, 4, 2 असा आहे आणि त्या प्रत्येक उपावर्तनातील पहिल्या बाकी वर्गानंतरचे इतर तीन बाकी वर्ग 7 सापेक्ष क्रमाने येणाऱ्या संख्या आहेत. उदाहरणार्थ, 1921 पासून सुरू होणाऱ्या उपावर्तनाचा बाकी वर्ग 4 आहे, म्हणजेच पुढचे तीन बाकी वर्ग 5, 6, आणि 0 असे असणार. ही सारिणी संक्षिप्त स्वरूपात खाली मांडली आहे.

उपावर्तनाचे सुरुवातीचे वर्ष	1901	1905	1909	1913	1917	1921	1925	1929
त्या वर्षाचा बाकी वर्ग	0	5	3	1	6	4	2	0...

आणि हीच सारिणी पूर्वी बनवलेल्या सारिणीस जोडून आपली दिनदर्शिका अशी बनवता येईल.

जानेवारी 1901	रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
	6	0	1	2	3	4	5
लीप वर्षांचे महिने	9 12	1 4 7	10	5	2 8	3 11	6
साध्या वर्षांचे महिने	4 7	1 10	5	8	2 3 9	6	9 12
उपावर्तनाचे प्रथम वर्ष	1901	1905	1909	1913	1917	1921	1925	1929
प्रथम वर्षांचा बाकी वर्ग	0	5	3	1	6	4	2	0...

आता आपली दिनदर्शिका संपूर्ण तयार आहे. हिचा उपयोग आपण 1901 ते 2099 या 198 वर्षांसाठी करू शकतो. त्यासाठी आपण काही उदाहरणे बघू.

15.12.1901 या तारखेसाठी आपणास 15 या दिवसाचा, 12 या महिन्याचा आणि 1901 या वर्षाचा बाकी वर्ग हे लागतील. 15 चा बाकी वर्ग 1, 12 या महिन्याचा (साध्या वर्षाच्या रांगेत) स्तंभातील मुख्य भागात बाकी वर्ग 5 आणि 1901 हेच प्रमाण वर्ष असल्यामुळे या वर्षाचा बाकी वर्ग 0 आहे. या तिघांची बेरीज आली 6 आणि 6 हा रविवारचा बाकी वर्ग आहे. म्हणजे 15.12.1901 रोजी रविवार आहे. असेच आणखी काही दिवस आपण या जंगी दिनदर्शिकेत शोधू.

1 ऑगस्ट 1920 रोजी लोकमान्य टिळकांचे निधन झाले. त्या दिवशी कोणता वार होता हा प्रश्न आपण सोडवू. 1 तारखेचा बाकी वर्ग हा 1 च, ऑगस्ट हा आठवा महिना, 1920 हे लीप वर्ष असल्यामुळे त्या वर्षी ऑगस्टला बाकी वर्ग 3 आणि 1920 वर्षाचा बाकी वर्ग 1917 या वर्षाच्या 6 मध्ये 3 मिळवून 9 किंवा (7 सापेक्ष) या संख्येचा बाकी वर्ग 2 आला. या तीन बाकी वर्गांची बेरीज 1 + 3 + 2 = 6 आली आणि 6 या बाकी वर्गाचा दिवस रविवार आहे. म्हणजे लोकमान्यांचे निधन रविवारी झाले होते.

15.8.1947 रोजी भारताला स्वातंत्र्य मिळाले हे आपणा सर्वांना ठाऊक आहे; पण त्या दिवासाचा वार किती लोकांना माहीत असेल? तो आपण काढू. 15 चा बाकी वर्ग 1 आणि लीप नसलेल्या ऑगस्टचा (म्हणजे आठव्या महिन्याचा) बाकी वर्ग 2. 1947 हे वर्ष 1928 नंतर 19 वर्षांनी येतं. म्हणजे 1947 चा बाकी वर्ग 1919 प्रमाणेच 1 आहे. म्हणून 15.8.1947 चा बाकी वर्ग 1 + 2 + 1 = 4 आहे आणि त्या दिवसाचा वार दिनदर्शिकेप्रमाणे मिळाला शुक्रवार.

30.1.1948 रोजी गांधीजींचा मृत्यू झाला. त्या दिवसाचा वार आपणास मिळेल तो असा. 30 तारखेला बाकी वर्ग 2. लीप वर्ष असलेल्या जानेवारी महिन्याचा बाकी वर्ग 0 आणि 1948 हे वर्ष 1901 नंतर 28 वर्षांचे आवर्तन संपल्यावर 20 वर्षांनी येते आणि त्या वर्षाचा बाकी वर्ग 2. म्हणून 30.1.1948 चा बाकी वर्ग 2 + 0 + 2 = 4, म्हणजे 30.1.1948 रोजी शुक्रवार असला पाहिजे.

अगदी खूप पुढे जाऊन 26.1.2050 ला आपल्या भारतीय संविधानास शंभर वर्षे होतील तो दिवसही शोधून काढणं तितकंच सोपं आहे. 28 वर्षांची पाच आवर्तने 140 वर्षांनी पूर्ण होतात आणि 2040 नंतर 10 वर्षांनी 2050 हे वर्ष येणार. म्हणजे त्या वर्षाचा बाकी वर्ग 1910 च्या बाकी वर्गाएवढा किंवा 4 आहे. 26 तारखेचा बाकी वर्ग 5 आणि साध्या जानेवारी महिन्याचा बाकी वर्ग 0. म्हणजे 26.1.2050 चा बाकी वर्ग 5 + 0 + 4 = 9 चा किंवा 2 आला. त्या दिवशीसुद्धा अर्थातच बुधवार असणार.

ही दिनदर्शिका 2099 नंतर किंवा 1901 च्या आधी वापरता येत नाही, कारण 1900 आणि 2100 ही वर्षे चारच्या पटीत असली तरी लीप वर्षे नाहीत. लीप वर्ष दर चार वर्षांनी येतं; पण दर शंभराव्या वर्षी लीप वर्ष गाळलं जातं आणि दर चारशेव्या वर्षी पुन्हा येतं. थोडक्यात, ज्या वर्षाच्या संख्येला चार आणि चारशे या दोन्ही आकड्यांनी पूर्ण भाग जातो तेच लीप वर्ष असतं. त्यामुळे 2000 हे जरी लीप वर्ष असलं तरी 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 आणि 2300 ही लीप वर्षे नसणार. त्यामुळे अधिक वर्षांसाठी हवं असेल तर आपण

बनवलेलं 28 वर्षांचे आवर्तन बदलावं लागेल आणि आपली दिनदर्शिका किचकट होईल. पण आपणास ती कशी बनवावी हे कळलं आहे. ही मर्यादा लक्षात ठेवून आपल्या दिनदर्शिकेचा उपयोग करायला आपण सुरुवात करावी. करणार ना तुम्ही?

दिनदर्शिकेतील मौज : 365 पेक्षा कमी दिवसांचे वर्ष

सप्टेंबर 1752

सध्या वापरात असणारी दिनदर्शिका ही ग्रेगोरियन दिनदर्शिका म्हणून ओळखली जाते. सोळाव्या शतकाच्या शेवटच्या कालखंडात तेराव्या धर्मगुरूने ही अमलात आणली.

रवि	सोम	मंगळ	बुध	गुरु	शुक्र	शनि
		1	2	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

25 मार्च 1752 पासून या दिनदर्शिकेची अंमलबजावणी इंग्लंड व अमेरिका यांनी सुरू केली. दिनांकाचा व वारांचा मेळ घालण्यासाठी तसंच ग्रेगोरियन दिनदर्शिकेत विसंगती निर्माण होऊ नये म्हणून सप्टेंबर 1752 मधील 11 दिवस कमी करण्यात आले.

वर दाखवलेली सप्टेंबर 1752 ची दिनदर्शिका मौजेची बाब आहे. सोळाव्या शतकाच्या आधी ज्युलियन दिनदर्शिका प्रचलित होती.

'मनोविकास प्रकाशन'चा विज्ञानाचा खजिना

खेळण्यांचा खजिना	अरविंद गुप्ता	३०.००
काडेपेटी व इतर विज्ञान खेळणी	अरविंद गुप्ता	४०.००
टाकाऊतून शिकाऊ	अरविंद गुप्ता	४०.००
उद्योगी बना	अरविंद गुप्ता	१२०.००
असे घडले शास्त्रज्ञ	अरविंद गुप्ता	१५०.००
परीक्षेला पर्याय काय?	हेरंब कुलकर्णी	२८०.००
धोका शाळा	अनु. हेमलता होनवाड	७०.००
शिक्षण प्रवाहाच्या उगमापाशी	सुचिता पडळकर	१८०.००
टीचर	सिल्व्हिया ॲश्टॅन वॉर्नर	१५०.००
माय कंट्री स्कूल डायरी	ज्युलिया वेबर गॉर्डन । अनु. विद्या भागवत	२५०.००
प्रिय बाई	बार्बियानाची शाळा	१२०.००
शोधांच्या कथा	आयझॅक ॲसिमो । अनु. सुजाता गोडबोले	६३०.००
का?	बाळ फोंडके	८०.००
कसं?	बाळ फोंडके	८०.००
किती?	बाळ फोंडके	८०.००
गोष्ट रसायनांची	अनिर्बन हाजरा । अनुवाद – रूपेश गुरव	१२०.००
किमया गणितमैत्रीची	जेन पोर्टमन । जेरेमी रिचर्डसन	१००.००
सोपे विज्ञान प्रयोग	ॲण्डी बायर्स । ॲन चाइल्ड्स । ख्रिस लेन	१३०.००
युनिस्को (विज्ञान शाळेतले विज्ञान घरातले)	भास्कर धोंडो केशव कर्वे	१७०.००
युवा-विज्ञान कुतूहल (भाग १,२,३)	आनंद घैसास	६०.००
खेळ खेळू विज्ञानाचे (भाग १,२,३)	आनंद घैसास	४०.००
आपले विश्व	आनंद घैसास	१३०.००
आपली सूर्यमाला	आनंद घैसास	१३०.००
दुर्बिणी आणि वेधशाळा	आनंद घैसास	१२०.००
वैज्ञानिक प्रकल्प	भालचंद्र मयेकर	८०.००
प्रयोगशाळेशिवाय विज्ञान प्रयोग	भालचंद्र मयेकर	७०.००
वनस्पतीशास्त्रातील विज्ञान प्रयोग	भालचंद्र मयेकर	५०.००
मजेदार विज्ञान प्रयोग	भालचंद्र मयेकर	६०.००
निर्मितीचं आकाश	रेणू दांडेकर	६०.००
मुलांसाठी मेडिकल जनरल नॉलेज (भाग १ ते ५)	डॉ. जगन्नाथ दीक्षित	३५०.००
पक्षी	सौ. शैलजा ग्रब	१२०.००
सस्तन प्राणी	सौ. शैलजा ग्रब	११०.००
सरपटणारे प्राणी	सौ. शैलजा ग्रब	११०.००
जलचर प्राणी	सौ. शैलजा ग्रब	१३०.००
गणितातील गमतीजमती	डॉ. जयंत नारळीकर	५०.००
अवयव बोलू लागतात	डॉ. यश वेलणकर	१२५.००
शाळेपासून मुक्ती वर्षापुरती	राहुल अल्वारिस	९०.००